Aufgabe 1. (4 Punkte)

a) Geben Sie explizit die regulären Mengen an, die durch die folgenden regulären Ausdrücke beschrieben werden:

- $(b|c)(a|d)$
- $(c(bz))|(cb|cz)$

b) Geben Sie einen möglichst kurzen regulären Ausdruck für die folgenden, durch reguläre Ausdrücke beschriebenen, regulären Mengen an (d.h. vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke).

- $(a|\epsilon)^+ b^*$
- $\Big(\big(b \mid (a|e|i|o|u)\epsilon^*\big)|a|c|d|e\Big)$

Aufgabe 2. (6 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, \mathbf{S})$, wobei $\Sigma = \{(,), a, b, c, d, e, \mathbf{id}\}$,
$V = \Sigma \cup \{\mathbf{S}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{I}, \mathbf{T}\}$; P sei durch die folgenden Produktionen vollständig spezifiziert:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{S} & \rightarrow & \mathbf{S}\ a\ \mathbf{S} \mid \mathbf{E} \\
\mathbf{E} & \rightarrow & \mathbf{E}\ b\ \mathbf{E} \mid \mathbf{F} \\
\mathbf{F} & \rightarrow & \mathbf{F}\ c\ \mathbf{F} \mid \mathbf{F}\ c\ \mathbf{H}\ b\ \mathbf{F} \mid \mathbf{T} \\
\mathbf{H} & \rightarrow & \mathbf{H}\ a\ \mathbf{I} \\
\mathbf{I} & \rightarrow & \mathbf{I}\ a \mid \mathbf{H}\ c \\
\mathbf{D} & \rightarrow & \mathbf{G}\ d\ \mathbf{D} \\
\mathbf{G} & \rightarrow & \mathbf{D}\ e\ \mathbf{G} \\
\mathbf{T} & \rightarrow & \mathbf{T}\ e\ \mathbf{T} \mid \mathbf{id} \mid (\ \mathbf{S}\ )
\end{array}
$$

a) Zeichnen Sie einen Ableitungsbaum für ((**id** b **id**) e (**id** c **id**)).

b) Berechnen Sie mit Hilfe von PROD und ERREICH die zu G äquivalente reduzierte Grammatik. Geben Sie als Zwischenschritt die von PROD erstellte Grammatik an.

Aufgabe 3. (9 Punkte)

Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind:

a) $\{w \in \Sigma^* \mid w = a^i b^j c^k,\ i, j, k \in \mathbb{N},\ i < j < k\}$

b) $\{w \in \Sigma^* \mid w = a^i b^j,\ i \in \mathbb{N},\ j = i^2\}$

c) $\{w \in \Sigma^* \mid w$ enthält gleich viele a, b und $c\}$

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die zweistelligen Prädikate $=$, $<$ und $\leqslant$ primitiv rekursiv sind.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

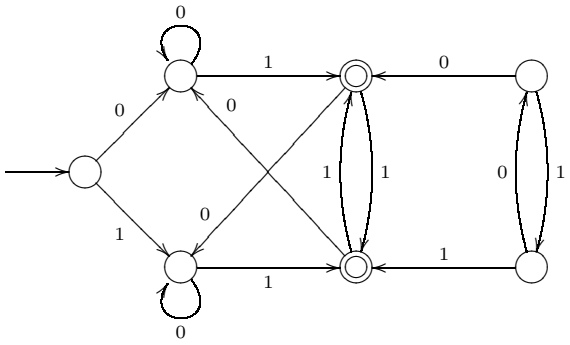
Konstruieren Sie NEAs für die folgenden regulären Ausdrücke:

a) $0^*1|1^*0$

b) $1(11^*00^*)^*$

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Minimieren Sie den folgenden endlichen Automaten:



Aufgabe 7. (4 Punkte)

Wandeln Sie die folgende kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform um:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow ab \mid aAb \\ B &\rightarrow c \mid cB \end{aligned}$$

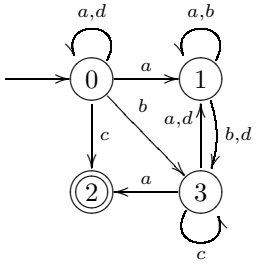
Aufgabe 8. (5 Punkte)

Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ heißt *rechtslinear*, falls jede Produktion in P die Form $A \rightarrow wB$ hat, wobei $A \in N, B \in N \cup \{\varepsilon\}, w \in \Sigma^*$. Eine Sprache heißt rechtslinear, falls sie von einer rechtslinearen Grammatik erzeugt werden kann.

Zeigen Sie: Jede rechtslineare Sprache ist regulär.

Aufgabe 9. (5 Punkte)

Sei $M = (\{0,1,2,3\}, \{a,b,c,d\}, \delta, 0, \{2\})$ ein endlicher Automat, wobei δ durch das folgende Diagramm festgelegt ist:



a) Geben Sie δ in tabellarischer Darstellung an.

b) Zeichnen Sie das Transitionsdiagramm eines Automaten M', der die Sprache $\{a,b,c,d\}^* \backslash L(M)$ akzeptiert.

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Welche der folgenden Gleichungen für reguläre Ausdrücke sind gültig?

a) $(ab)^* = (ba)^*$

b) $(a|b)^* = (b|a)^*(b|a)^*$

c) $(ab)^* = a(ba)^*b$

d) $(ab)^* = (abab)^*$

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Sei $\Sigma := \{a, b\}, L := \{a^n b^n \mid n > 0\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$. Geben Sie die Produktionenmenge P für die kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ an, so dass $V = \{S, A, B\} \cup \Sigma$ und $L(G) = L$.

Aufgabe 12. (8 Punkte)

Exakt-3-SAT ist SAT eingeschränkt auf die Fälle, in denen alle Klauseln exakt drei, paarweise verschiedene, Literale, d.h. mindestens 3 und höchstens 3, enthalten. Zeigen Sie durch Reduktion von 3-SAT, dass Exakt-3-SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Aufgabe 13. (5 Punkte)

Schreiben Sie ein TM-Programm, das für die Eingabe $\text{bin}(x)$ die Ausgabe $\text{bin}(x+1)$ berechnet.

Aufgabe 14. (8 Punkte)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ eine deterministische Turingmaschine, die auf Eingaben der Länge n nur die Bandzellen $1, \ldots, s(n)$ benutzt. Angenommen, M stoppt auf einer Eingabe w der Länge n.

a) Nach wie vielen Schritten hält M spätestens an? (Tipp: Wann würde M in eine Endlosschleife geraten?)

b) M akzeptiere die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, halte aber auf einigen Eingaben $w \notin L$ nicht an. Zeigen Sie, dass es eine deterministische Turingmaschine gibt, die L akzeptiert, auf *allen* Eingaben hält und ebenfalls nur die Bandzellen $1, \ldots, s(n)$ benutzt.