

**BA-INF 041 - Algorithmen und Berechnungskomplexität II**  
**SS 2015**  
**Übungsblatt 7**  
2. Juni 2015

**Aufgabe 1**

Sei  $G = (V, E, w)$  ein gewichteter, gerichteter Graph. Sei  $s \in V$ , so dass jeder Knoten  $v \in V$  von  $s$  aus erreichbar ist. Zeigen Sie, dass genau dann ein kürzester Pfad von  $s$  nach  $v \in V$  existiert, wenn es keinen Kreis negativen Gewichts gibt, der von  $s$  aus erreichbar ist und von dem aus  $v$  erreicht werden kann.

**Aufgabe 2**

- a) Sei  $G = (V, E, w)$  ein gewichteter, gerichteter Graph und  $s \in V$  der betrachtete Quellknoten. Zeigen Sie, dass dann für alle Kanten  $(u, v) \in E$

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$$

gilt.

- b) Konstruieren Sie einen gewichteten, gerichteten Graphen  $G = (V, E, w)$  mit einem Startknoten  $s \in V$ , so dass für jede Kante  $(x, y) \in E$  sowohl ein kürzester Wegebaum existiert, der  $(x, y)$  enthält, als auch ein kürzester Wegebaum existiert, der  $(x, y)$  nicht enthält.
- c) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage für einen gewichteten, gerichteten Graphen  $G = (V, E, w)$ : Wenn alle Kanten  $e \in E$  unterschiedlichen Gewichte haben, dann ist der kürzeste Wegebaum mit Startknoten  $s \in S$  eindeutig.

### Aufgabe 3

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

- a) In einem gewichteten, ungerichteten Graphen  $G = (V, E, w)$  mit positiven Kantengewichten ist die Kante mit den geringsten Gewicht stets im kürzesten Wegebaum enthalten.
- b) Angenommen, ein azyklischer, gewichteter, gerichteter Graph  $G = (V, E, w)$  wird zu dem Graphen  $G' = (V, E, w')$  transformiert, wobei  $w'(e) := k - w(e)$ ,  $e \in E$  und  $k$  eine ausreichend große Konstante ist. Dann entspricht ein kürzester Pfad in  $G'$  einem längsten Pfad in  $G$ .

### Aufgabe 4

Gegeben sei ein azyklischer Graph  $G = (V, E)$  und ein Startknoten  $s \in V$ . Entwickeln Sie einen Algorithmus, der in linearer Zeit für alle  $v \in V$  einen längsten Weg von  $s$  nach  $v$  berechnet. Was geschieht, wenn ein Graph Kreise enthält?