Übungen zur Informatik III im WS 02/03

Musterlösungen zu Blatt 4

Aufgabe 1.

Suche einen Schlüssel x in einem inneren Knoten mit *binärer Suche*. Laufzeit: $\mathcal{O}(\log_2 k \cdot \log_k n) = \mathcal{O}(\log_2 n)$, denn $\log_a x \cdot \log_x b = \log_a b$ und $\log_2 k$ bleibt für einen B-Baum konstant.

Aufgabe 2.

a) Wir berechnen zunächst die Mindestzahl der Knoten:

$$\nu_{min}(T) = 1 + 2 + 2 \cdot (k + k^2 + \ldots + k^{h-2}) = 1 + 2 \cdot \sum_{i=0}^{h-2} k^i = 1 + 2 \cdot \frac{1 - k^{h-1}}{1 - k}$$

Nun die Höchstzahl der Knoten:

$$\nu_{max}(T) = 1 + (2k-1) + (2k-1)^2 + \ldots + (2k-1)^{h-1} = \sum_{i=0}^{h-1} (2k-1)^i =$$

$$\frac{1 - (2k-1)^h}{1 - 2k + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k-1)^h - 1}{k - 1}$$

b) Da $B_{min} := 2k^{h-1}$ die Mindestzahl Blätter und $k(2k^{h-2} + 1 - 1 = 2k^{h-1} + (k-1) = B_{min} + (k-1)$ genau $(k-1)$ Blätter mehr sind, stellt man fest, dass sich die Anzahl der inneren Knoten nicht verändern kann. Bleibt die Frage, auf wie viele unterschiedliche Arten man die n Blätter auf deren $2k^{h-2} =: P$ Väter verteilen kann, ohne dass die Sortierung verloren geht.

Sei $m := (n - B_{min})$. Wir formulieren das Problem neu: Wie viele sortierte Listen der Länge m gibt es, so dass jedes Element der Liste aus $\{1, 2, \ldots, P\}$ stammt? Wir fragen also nach den Zuordnungen der "überzähligen" Knoten zu ihren Vätern. Aus der Kombinatorik erhalten wir als Antwort $\binom{P+m-1}{m}$ Möglichkeiten (s. hierzu [1]).

Wir schreiben um:

$$\binom{2k^{h-2} + (n - 2k^{h-1}) - 1}{n - 2k^{h-1}} = \binom{n - 1 - 2k^{h-2}(k-1)}{n - 2k^{h-1}}$$

c) Wir benutzen die Bezeichnungen aus der vorigen Teilaufgabe. Gefragt ist demnach nach der Anzahl von B-Bäumen für folgende Ungleichung: $B_{min} \leqslant n \leqslant B_{min} + 2$. Anders ausgedrückt: $0 \leqslant m \leqslant 2$. Da wir nach Lösen der vorigen Teilaufgabe nun eine Formel zur Berechnung zur Hand haben, müssen wir lediglich aufsummieren:

$$\binom{P-1}{0} + \binom{P+1-1}{1} + \binom{P+2-1}{2} = 1 + P + \binom{P+1}{2}$$

Es ist aber $P = 2k^{h-2} = 2 \cdot 1024^2 = 2^{21}$. Wir erhalten als gesuchte Anzahl: $1 + 2^{21} + (2^{21} + 1) \cdot 2^{20} = (2^{21} + 1) \cdot (2^{20} + 1)$

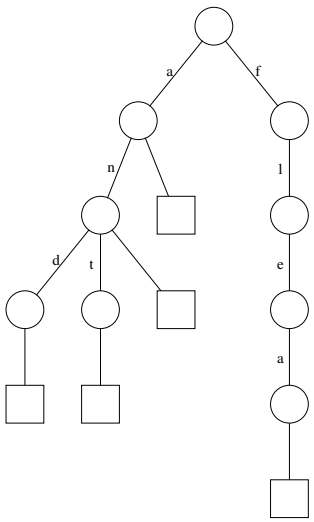
d) Wir wissen bereits, dass $h_{min} := \log_{2k-1} n \leqslant h \leqslant \log_k \left(\frac{n}{2}\right) + 1 =: h_{max}$ gilt. Also ist

$$\begin{aligned} \Delta_h(k, n) &= |h_{max} - h_{min}| \\ &= \log_k \left(\frac{n}{2}\right) + 1 - \log_{2k-1} n \\ &= \log_k (2k-1) \cdot \log_{2k-1} \left(\frac{n}{2}\right) + 1 - \log_{2k-1} n \end{aligned}$$

Aus $k > 1$ folgt $\log_k (2k-1) < 2$ und wegen $n \geqslant 3$ ist $\log_{2k-1} \left(\frac{n}{2}\right) > 0$, so dass insgesamt gilt:

$$\begin{aligned} \log_k (2k-1) \cdot \log_{2k-1} \left(\frac{n}{2}\right) + 1 - \log_{2k-1} n &< 2 \cdot \log_{2k-1} \left(\frac{n}{2}\right) + 1 - \log_{2k-1} n \\ &= \log_{2k-1} \left(\frac{n^2}{4}\right) + 1 - \log_{2k-1} n \\ &= \log_{2k-1} \left(\frac{n}{4}\right) + 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.



Aufgabe 4.

Index	Liste
0	a,flea
1	and
2	ant
3	an
4	flee

Aufgabe 5.

a)

Index	Eintrag	Index	Eintrag
0	august	7	mai
1	juli	8	dezember
2		9	januar
3	märz	10	februar
4	juni	11	september
5	oktober	12	november
6	april		

b)

Index	Eintrag	Index	Eintrag
0	august	7	mai
1	juli	8	november
2	juni	9	januar
3	märz	10	februar
4	oktober	11	september
5	dezember	12	
6	april		

Literatur

[1] U. Krengel, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, vieweg, 1998.

□