INSTITUT FÜR INFORMATIK V
UNIVERSITÄT BONN

Prof. Dr. N. Blum
H.-H. Leinen
M. Löhnertz

53117 BONN
Römerstraße 164

28. November 2002

Übungen zur Informatik III im WS 02/03

Blatt 7

Abgabe: 03.12.2002

Da das Abschreiben der Gruppen untereinander ein immer größeres Ärgernis darstellt, wollen wir zu individualisierten Aufgabenblättern übergehen. Dies testen wir auf diesem Übungsblatt mit einer ersten Aufgabe. Dazu wählen bitte alle Gruppenmitglieder eine Schreibweise ihrer Vor- und Nachnamen, in denen kein Zeichen außer $A - Z$ vorkommt. Konkatenieren Sie Vor- (evtl. Mittel-) und Nachnamen und wählen Sie in Ihrer Gruppe das lexikographisch kleinste Wort, das dabei entsteht. Dieses Wort ist ab sofort das Schlüsselwort SWG für Ihre Gruppe. Geben Sie es ab sofort auf jedem Übungszettel an.

Der Ausdruck SWG_i bezeichnet den i-ten Buchstaben Ihres Schlüsselwortes. Die Funktion $\text{asc}(SWG_i)$ liefert den ASCII-Wert des i-ten Zeichens aus SWG. So ist z.B. $\text{asc}(\texttt{MARTINLOEHNERTZ}_2) = 65$. Geben Sie bei jeder Aufgabe, in der diese Ausdrücke benutzt werden, die entsprechenden Werte für Ihre Gruppe an.

Aufgabe 1. (2 Punkte)

a) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph. Zeigen Sie, dass bei Algorithmischer Suche mit Stack (DFS) keine Querkanten weiterverfolgt werden.

b) Ein *spannender Baum* eines Graphen ist ein Subgraph, der Baumstruktur hat und dessen Knotenmenge mit der des Graphen übereinstimmt. Zeigen Sie: Jeder zusammenhängende Graph hat einen spannenden Baum.

Aufgabe 2. (1 Punkt)

Wieviele Kanten hat ein einfacher, zusammenhängender, schleifenfreier Graph mit $\text{asc}(SWG_3)$ Knoten, der genau einen Kreis enthält ?

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Neben der Nachbarschaftsmatrix (auch *Adjazenzmatrix* genannt), die angibt, ob zwei Knoten benachbart sind, gibt es eine weitere Matrix, die einen Graphen beschreibt, die sogenannte *Inzidenzmatrix*. Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$ ist die Inzidenzmatrix eine $n \times m$ Matrix (c_{ij}) mit Einträgen aus $\{0, 1\}$, wobei c_{ij} genau dann 1 ist, wenn Kante j an Knoten i stößt. Im Rahmen dieser Aufgabe betrachten wir diese Matrix als eine Matrix über dem Körper $\mathbb{Z}_2$.

Wir können jeder Teilmenge der Kantenmenge $E' \subset E$ einen Vektor $\vec{v}$ aus $\mathbb{Z}_2^{|E|}$ zuordnen, wobei wir bzgl. der Kanten die gleiche Reihenfolge wie in der Inzidenzmatrix voraussetzen und v_j genau dann 1 ist, wenn Kante j in E' ist.

Zeigen Sie: Der Kern der Inzidenzmatrix wird von denjenigen Vektoren aufgespannt, die den Kreisen des Graphen entsprechen.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei C_n ein Graph mit n Knoten, der einen einfachen Kreis der Länge n beschreibt. Eine *Clique* K_n ist ein Graph, in dem jeder Knoten eine Kante zu jedem anderen Knoten hat[1].

a) Charakterisieren Sie Breiten- und Tiefensuche auf C_n, indem Sie den Baum beschreiben, der aus den Baumkanten der Algorithmischen Suche besteht.

b) Charakterisieren Sie Breiten- und Tiefensuche auf K_n in gleicher Weise wie in Teilaufgabe a).

c) Zeichnen Sie die strukturell verschiedenen Bäume, die bei Algorithmischer Suche auf K_6 entstehen können, wenn man für Q eine Datenstruktur benutzt, die bei der Operation "wähle $v \in Q$" einen zufällig gewählten Knoten zurückgibt.

d) Wieviele strukturell verschiedene Bäume können bei der in Teilaufgabe c) verwendeten Version der Algorithmischen Suche entstehen, wenn man sie auf K_8 ausführt?

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Sei $I(\mathbb{R})$ die Menge der Intervalle von $\mathbb{R}$. Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein *Intervallgraph*, falls eine Abbildung $f : V \to I(\mathbb{R})$ existiert, so dass $(v_i, v_j) \in E :\Longleftrightarrow f(v_i) \cap f(v_j) \neq \emptyset$.

Zeigen Sie: In einem Intervallgraph hat jeder einfache Kreis der Länge > 3 eine Sehne. (Eine *Sehne* in einem Kreis $[v_0, v_1, \ldots, v_k, v_0]$ ist eine Kante $(v_i, v_j) \in E$, so dass es einen Pfad P_{ij} von v_i nach v_j auf dem Kreis gibt mit $|P_{ij}| > 1$ und dass (v_i, v_j) selbst nicht zum Kreis gehört).

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Eine Kiste enthält n Karten, die von 1 bis n durchnumeriert sind. Daneben steht genau ein Tisch, der so groß ist, dass er alle n Karten, ohne Überlappungen nebeneinander gelegt, aufnehmen kann.

a) Wieviele verschiedene Konstellationen können sich ergeben, wenn man k Karten aus der Kiste nimmt und sie in der Reihenfolge der Entnahme nebeneinander auf den Tisch legt?

b) Wieviele verschiedene Konstellationen ergeben sich, wenn man die k Karten nach Größe der Zahlen sortiert auf den Tisch legt?

c) Wieviele der Konstellationen aus Teil b) enthalten die Zahl 1? Wieviele enthalten sie nicht?

d) Stellen Sie eine (sehr einfache) Formel auf, die die Lösung von Teil b) in Bezug zu Lösungen für den Fall $n - 1$ und geeignet gewählte k setzt.

e) Formen Sie unter Verwendung der Lösung von Teil b) den Ausdruck $(a + b)^x$ in eine Summenformel um (Multinomischer Lehrsatz). Seien die Lösungen von Teil b) mit C_n^k bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ und interpretieren Sie dies.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Definitionen der $\mathcal{O}$-Notation für Funktionen $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ die gleiche Menge definieren:

1. $\mathcal{O}(g(n)) := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists c, n_0 : \forall n > n_0 : c * g(n) > f(n)\}$
2. $\mathcal{O}(g(n)) := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists c_1, c_2 : c_1 * g(n) + c_2 > f(n)\}$

Schlagen Sie in Lehrbüchern die Definitionen der folgenden Symbole zur Laufzeitanalyse von Algorithmen nach und untersuchen Sie die zugehörigen Mengen auf Teilmengenbeziehungen, wobei jeweils die selbe Funktion g zur Definition der Mengen benutzt wird: $\mathcal{O}(g(n)), o(g(n)), \Omega(g(n)), \omega(g(n)), \Theta(g(n))$.

□

[1] Ein solcher Graph heißt auch *vollständig*. Einen vollständigen Teilgraphen eines Graphen nennt man ebenfalls eine Clique.