Prof. Dr. Norbert Blum Informatik V

Algorithmische Spieltheorie und das Internet
WS 2005/06
5. Übung

22.11.2005

Aufgabe 1:

Beweisen Sie, dass für $0 \leq a, b, a', b'$ gilt $\frac{a+b}{a'+b'} \leq \max\{\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}\}$.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes nichtatomare Lastbalancierungsspiel:
Gegeben seien m Server $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ und n Typen von Jobs. Für jeden Jobtyp $j \in J$ gibt es eine Teilmenge $S_j \subseteq S$ von Servern, die Jobs vom Typ j bedienen dürfen. Von jedem Jobtyp gibt es eine Einheit von Jobs. Eine Zuordnung der Jobs an die Server ist ein Vektor mit Komponenten $x_{ij} \geq 0$, so dass $x_{ij} = 0$ wenn $i \notin S_j$ und $\sum_{i \in S_j} x_{ij} = 1$. Die Last L_i eines Servers s_i ist definiert durch $L_i = \sum_{j \in J} x_{ij}$. Jeder Server hat eine lastabhängige Antwortzeit. Die Antwortzeit des Servers s_i bei Last x sei $r_i(x)$. Die Funktionen r_i sind alle stetig und monoton wachsend. Eine Lösung ist im Nash-Gleichgewicht, wenn für alle Jobtypen j und alle Server s_i gilt: Falls $x_{ij} > 0$ und $k \in S_j$, dann gilt $r_i(L_i) \leq r_k(L_k)$.

a) Zeigen Sie, dass das nichtatomare Lastbalancierungsspiel stets ein reines Nash-Gleichgewicht besitzt.

b) Sei die Minimierung der maximalen Antwortzeit die Zielfunktion. Zeigen Sie, dass jedes Nash-Gleichgewicht diese Zielfunktion über alle Zuordnungen minimiert.

c) Sei die mittlere Antwortzeit $\sum_{i=1}^{m} L_i r_i(L_i)$ die Zielfunktion. Nehmen wir ferner an, dass für alle i gilt: $r_i(x) = x$. Zeigen Sie, dass jedes Nash-Gleichgewicht diese Zielfunktion minimiert.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass das "Münzwurfspiel" ein gemischtes Nash-Gleichgewicht besitzt.