Prof. Dr. Norbert Blum
Elena Trunz

Universität Bonn
Institut für Informatik V

Wintersemester 2013/2014

BA-INF 011 - Logik und Diskrete Strukturen

Übungsblatt 8

9.12.2013

Aufgabe 1

Seien $(G, \circ, e)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe von G. $a, b \in G$ heißen *äquivalent* $a \sim b$, wenn $a^{-1}b \in H$.

1. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
2. Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklassen der Relation $\sim$ genau die Linksklassen bezüglich H sind.
3. Beweisen Sie, dass $a \circ H$ und H gleichmächtig sind.

Aufgabe 2

Seien $(G, \circ, e)$ eine endliche Gruppe und $a \in G$. Zeigen Sie, dass dann $a^{ord\ G} = e$ gilt.

Aufgabe 3

Sei $(G, \circ, e)$ eine endliche Gruppe und $a \in G$. Beweisen Sie, dass $H_a = \{a^0, a^1, ..., a^{ord\ a}\}$ eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 4

Sei $\mathbb{R}_{\geq 0}$ bzw. $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge aller reellen Zahlen x mit $x \geq 0$ bzw. $x > 0$. Ferner sei die Abbildung $f : (\mathbb{R}_{\geq 0}, +, 0) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ mit $f(x) := 2^x$ gegeben. Ist f ein Homomorphismus? Ist die Umkehrabbildung von f ein Homomorphismus? Beweisen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 5

Seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ zwei zyklische Gruppen mit erzeugenden Elementen $a \in G$ und $h \in H$. Ferner sei $ord\ G = ord\ H$. Betrachten Sie die Abbildung $f : G \to H$, wobei $f(g^k) := h^k$ für $k = 0, 1, 2, ...$ Beweisen Sie, dass die Abbildung f bijektiv ist.

Aufgabe 6

Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass dann $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper ist.

Aufgabe 7

Im Beweis von Satz 3.5 aus der Vorlesung kommen folgende Mengen vor: $a_i b_j H^{''}$, $i \in I, j \in J$. Beweisen Sie, dass diese Mengen paarweise disjunkt sind.