Sei $\varphi: \{x_1, \dots, x_t\} \to \{0,1\}$ eine Einsetzung

2.2.

Es existiert genau dann eine Erweiterung $\varphi': \{x_1, x_2, \dots, x_t, y_1, y_2, \dots, y_t\} \to \{0,1\}$ von φ mit $\varphi'(\alpha) = 1$, wenn $\varphi(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_t) = 1$.

Bew.:

„$\Leftarrow$"

Sei $\varphi: \{x_1, x_2, \dots, x_t\} \to \{0,1\}$ eine Einsetzung mit $\varphi(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_t) = 1$.

$\Longrightarrow$

$$\varphi(x_i) = 1 \text{ für ein } i \in \{1, \dots, t\}.$$

Sei

$$i_0 = \min\{i \mid \varphi(x_i) = 1\}.$$

Setze

$$\varphi'(z) = \begin{cases} \varphi(x_j) & \text{falls } z = x_j \\ 0 & \text{falls } z = y_j \text{ mit } j < i \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt: $\varphi'(\alpha) = 1$. (überzeugen sie sich)

„$\Longrightarrow$"

Sei $\varphi': \{x_1, \dots, x_t, y_1, \dots, y_t\} \to \{0,1\}$ eine Einsetzung mit $\varphi'(\alpha) = 1$.

Annahme:

$$\varphi'(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_t) = 0.$$

$\Rightarrow$

$$\varphi'(x_i) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, t\}$$

Also gelten folgende Implikationen:

1. Klausel in α $\Rightarrow \varphi'(\neg y_1) = 1 \Rightarrow \varphi'(y_1) = 0$
2. " " " $\Rightarrow \varphi'(\neg y_2) = 1 \Rightarrow \varphi'(y_2) = 0$

$\vdots$

t. " " " $\Rightarrow \varphi'(\neg y_t) = 1 \Rightarrow \varphi'(y_t) = 0$

$\Longrightarrow$

y_t letzte Klausel in α $\qquad \varphi'(\alpha) = 0$

Widerspruch

Betrachte beliebigen Ausdruck in konjunktiver Normalform

- Ersetzung jeder Klausel mit > 3 Literalen wie oben beschrieben.

Leicht zu sehen.

neuer Ausdruck erfüllbar $\Leftrightarrow$ alter Ausdruck erfüllbar

Transformation ist in Polynomzeit durchführbar.

$\blacksquare$

Übung $\quad K = \dots (y_{t-1} \cup x_t)$

Satz 6.5

Das Cliqueproblem ist NP-vollständig.

Beweis:

- Clique $\in$ NP ✓

Ziel: Beweis, dass SAT(3) $\leq_{pol}$ Clique.

Sei

$$\alpha = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$$

ein Ausdruck in konjunktiver Normalform mit höchstens drei Literalen pro Klausel.

Sei für $1 \leq i \leq k$

$$C_i = x_{i_1}^{\beta_{i_1}} \vee x_{i_2}^{\beta_{i_2}} \vee x_{i_3}^{\beta_{i_3}}, \text{ wobei}$$

- $\beta_{i_\ell} \in \{0,1\}$, $1 \leq \ell \leq 3$
- $x^j = \begin{cases} x & \text{falls } j=1 \\ \bar{x} & \text{falls } j=0. \end{cases}$
- Falls C_i < 3 Literale enthält, dann verkürzt sich die Klausel entsprechend.
- Sei i_r die Anzahl der Literale in C_i.

Betrachte

$G = (V, E)$ mit

$V = \{ v_{i\ell} \mid 1 \leq i \leq k \text{ und } 1 \leq \ell \leq i_r \}$

und

$$E = \{ (v_{i_\ell}, v_{j_m}) \mid i \neq j \text{ und } (x_{i_\ell} \neq x_{j_m} \text{ oder } \beta_{i_\ell} = \beta_{j_m}) \}$$

G kann in Polynomzeit konstruiert werden.

<u>Interpretation:</u>

$(v, w) \in E \iff \exists$ Einsetzung, die beide korrespondierenden Literale wahr macht.

<u>Beh.:</u> α erfüllbar $\iff$ G enthält k-Clique.

<u>Bew.:</u>

"$\Rightarrow$"

Sei α erfüllbar.

$\Rightarrow$

$\exists$ Einsetzung φ mit $\varphi(\alpha) = 1$.

$\Rightarrow$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ $\exists \ell$, etwa $\ell(i)$ mit

$$\varphi(x_{i_\ell}^{\beta_{i_\ell}}) = 1.$$

Wähle

$$V' = \{ v_{i_{\ell(i)}} \mid 1 \leq i \leq k \}$$

<u>Ziel:</u> Beweis, dass V' k-Clique.

Betrachte $v_{i_n}, v_{j_m} \in V'$ mit $i_n \neq j_m$.

$\Rightarrow$

$$\varphi(x_{i_n}^{\beta_{i_n}}) = \varphi(x_{j_m}^{\beta_{j_m}}) = 1.$$

$\Rightarrow$

$x_{in} \neq x_{jm}$ oder $\beta_{in} = \beta_{jm}$

$\Rightarrow$

$(v_{in}, v_{jm}) \in E$.

$\Rightarrow$ V' ist k-Clique.

"$\Leftarrow$"

Sei $V' \subseteq V$ eine k-Clique.

Wegen $i \neq j$ $\forall (v_{in}, v_{jm}) \in E$ gilt: V' kann aus folgt geschrieben werden:

$V' = \{ v_{i_{e(i)}} \mid 1 \leq i \leq k \}$.

Sei

$$\varphi(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z = x_{i_{e(i)}} \text{ für ein } i \text{ und } \beta_{i_{e(i)}} = 1 \\ 0 & \text{falls } \ldots\ldots \beta_{i_{e(i)}} = 0 \\ \text{beliebig} & \text{sonst} \end{cases}$$

φ ist wohldefiniert, da ansonsten für ein Paar i, j, $i \leq j$ gilt:

$$x_{i_{e(i)}} = x_{j_{e(j)}} \text{ und } \beta_{i_{e(i)}} \neq \beta_{j_{e(j)}}.$$

Dann wäre aber $(v_{i_{e(i)}}, v_{j_{e(j)}}) \notin E$ und V' keine k-Clique.

Ferner gilt:

$$\varphi(x_{i_{e(i)}}^{\beta_{i_{e(i)}}}) = 1, \; 1 \le i \le k.$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(\alpha) = 1.$$

$\blacksquare$

Überdeckende Knotenmenge (ÜK)

<u>gegeben</u>: ungerichteter Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$

<u>Frage</u>: Gibt es eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| = k$, so dass für jede Kante $(v,w) \in E$ gilt $v \in V'$ oder $w \in V'$?

<u>Satz 6.6</u>

ÜK ist NP-vollständig.

<u>Beweis</u>:

- ÜK $\in$ NP ✓
- <u>Ziel</u>: Beweis, dass Clique $\le_{pol}$ ÜK.

Seien $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$ Eingabe für Clique

Betrachte

$$\overline{G} = (V, V \times V \setminus E) \text{ und } k' = |V| - k.$$

$\Longrightarrow$

G hat k-Clique $\Longleftrightarrow$ $\overline{G}$ besitzt ÜK der Größe k'.

Transformation kann auch in Polynomzeit

durchgeführt werden.

(0,1) - Integer-Programmierung (IP)

gegeben: Integer-Matrix C, Integer-Vektor d.

Frage: Gibt es einen (0,1)-Vektor c, so dass $C \cdot c \geq d$?

Satz 6.7

IP ist NP-vollständig

Beweis:

- $IP \in NP$ ✓
- Ziel: Beweis, dass $SAT \leq_{pol} IP$.

Sei

$$\alpha = z_1 \wedge z_2 \wedge \ldots \wedge z_k$$

beliebiger Ausdruck in konjunktiver Normalform. Seien

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

die Variablen, die in α vorkommen.

Definition von $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq k,\, 1 \leq j \leq m}$ und von $d = (d_i)_{1 \leq i \leq k}$:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_j \text{ Literal in } z_i \\ -1 & \text{falls } \overline{x_j} \text{ Literal in } z_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$d_i = 1 - |\{ x_j \mid \overline{x_j} \text{ ist Literal in } z_i \}|.$$

Transformation ist in Polynomzeit durchführbar.

<u>Beh.:</u>

α erfüllbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ (0,1)-Vektor c mit $C \cdot c \geq d$.

<u>Bew.:</u>

„$\Rightarrow$"

Sei

$$\varphi : \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \to \{0,1\}$$

Einsetzung mit $\varphi(\alpha) = 1$.

<u>Definition von c:</u>

$$c_j = \varphi(x_j), \quad 1 \leq j \leq m.$$

$\varphi(z_i) = 1 \Rightarrow$

$\exists\ x_j \overset{\text{in}}{\in} z_i$ mit $\varphi(x_j) = 1$ oder

$\exists\ \overline{x_j} \overset{\text{in}}{\in} z_i$ mit $\varphi(x_j) = 0$.

$\Rightarrow$

$$\sum_{x_j \in Z_i} \varphi(x_j) \geq 1 \quad \text{oder}$$

$$\sum_{\overline{x_j} \in Z_i} \varphi(x_j) < \left| \{ x_j \mid \overline{x_j} \text{ Literal in } Z_i \} \right|$$

Also gilt für $1 \leq i \leq k$:

$$\begin{aligned}
(C \cdot c)_i &= \sum_{j=1}^{m} c_{ij} c_j \\
&= \sum_{x_j \in Z_i} \varphi(x_j) - \sum_{\overline{x_j} \in Z_i} \varphi(x_j) \\
&\geq 1 - \sum_{\overline{x_j} \in Z_i} 1 \\
&= d_i .
\end{aligned}$$

$a \Leftarrow a$

Sei c ein $(0,1)$-Vektor mit $Cc \geq d$.

Definiere

$$\varphi : \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \longrightarrow \{0,1\}$$

durch

$$\varphi(x_j) = c_j \qquad 1 \leq j \leq m .$$

z.z. $\varphi(\alpha) = 1$.

<u>Annahme:</u> $\varphi(\alpha) = 0$

$\Rightarrow$

$\exists\, i \in \{1, 2, \dots, k\}$ mit $\varphi(z_i) = 0$.

$\Rightarrow$

$$\varphi(x_j) = c_j = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_j \in z_i \\ 1 & \text{falls } \overline{x_j} \in z_i \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$d_i \leq (C \cdot c)_i = \sum_{x_j \in z_i} c_j - \sum_{\overline{x_j} \in z_i} c_j$$

$$= - \sum_{\overline{x_j} \in z_i} 1$$

$$< d_i$$

Widerspruch!

Also gilt $\varphi(\alpha) = 1$. ∎

<u>Hamiltonscher Kreis (HK)</u>

<u>gegeben:</u> ungerichteter Graph $G = (V, E)$

<u>Frage:</u> Gibt es einen Kreis in G, der jeden Knoten $v \in V$ genau einmal enthält?

Satz 2.0: HK ist NP-vollständig.

Beweis:

- $HK \in NP$ ✓
- Ziel: Beweis, dass $SAT(3) \leq_{pol} HK$

Sei

$$\alpha = z_1 \wedge z_2 \wedge \dots \wedge z_k$$

ein beliebiger Ausdruck in konjunktiver Normalform mit ≤ 3 Literale pro Klausel.

Seien

$$x_1, x_2, \dots, x_m$$

die Variablen, die in α vorkommen.

Graph A: Teilgraph eines Graphen G, so dass

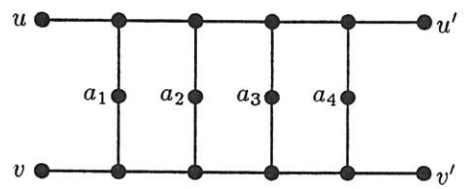


Abbildung 2.3: Graph *A*.

1. keine anderen Kanten zu Knoten in $A \setminus \{u, u', v, v'\}$ inzident sind und
2. G einen Hamiltonschen Kreis c enthält

$\Longrightarrow$

Nur auf folgenden Arten und Weisen kann c den Teilgraphen A durchqueren.

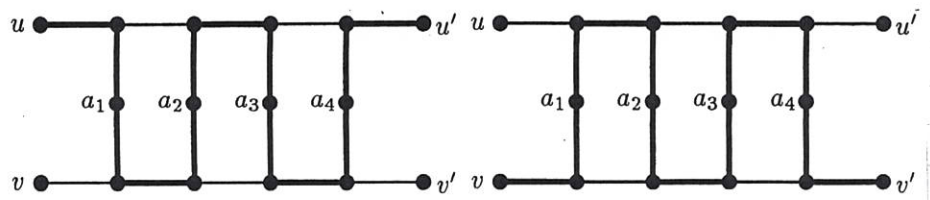


Abbildung 2.4: Durchquerungen von A der 1. und der 2. Art.

Interpretation:

$A \hat{=}$ verhält sich so, als G enthielte Paar (u,u') und (v,v') von Kanten, so dass jede HK exakt eine dieser Kanten durchqueren muss.

Graph B: Teilgraph eines Graphen G, so dass

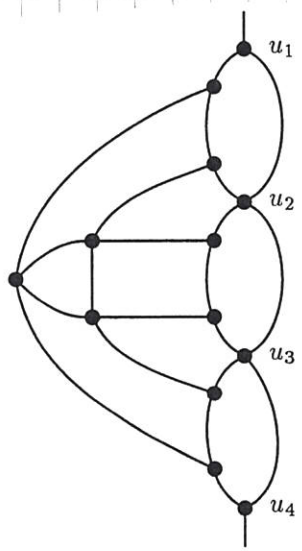


Abbildung 2.5: Teilgraph B.

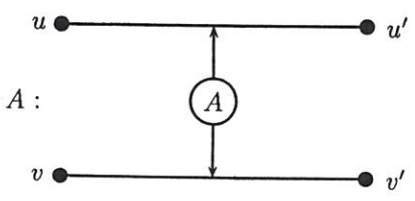
1. keine andere Kanten zu Knoten in $B \setminus \{u_1, u_4$ inzident sind und
2. G einen Hamiltonschen Kreis c enthält

Eigenschaften.

a) c kann nicht alle Klauselkanten (u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_4) durchqueren.

b) Jede echte Teilmenge von $\{(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u$ kann Teil von c sein.

Abgekürzte Beschreibung von A und B:



Kanten (u, u') und (v, v') sind durch A-Verbinder miteinander verbunden.

Abbildung 2.6: Teilgraph A.

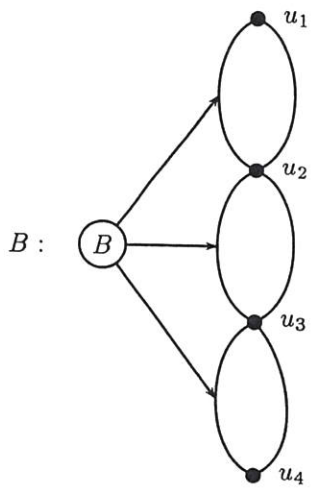


Abbildung 2.7: Teilgraph B.

Ziel:

Konstruktion des Graphen $G = (V, E)$, der genau dann einen HK enthält, wenn φ erfüllbar ist.

O.B.d.A. enthält jede Klausel in α exakt drei Literale.

(verdoppeln bzw. verdreifachen von Literalen.)

<u>Struktur von G:</u>

α		G
• Klausel z_i, $1 \le i \le k$	$\hat{=}$	Kopie von B in Serie miteinander verbunden.
• Variable x_i $1 \le i \le m$	$\hat{=}$	• zwei Knoten v_i und w_i • zwei Kopien von (v_i, w_i) (<u>Links</u>- und <u>Rechts</u>-<u>Kopie</u>.) <u>Literalkanten</u>

• Zusätzlich enthält G:

(w_i, v_{i+1}) $1 \le i < m$

(u_{11}, v_1) und (u_{k4}, w_m)

• Für $1 \le i \le k$ verbinde Kante $(u_{ij}, u_{i(j+1)})$ mit der

$$\begin{cases} \text{Linkskopie der Kante } (v_e, w_e) & \text{falls } x_e \text{ j-tes Literal in } z_i \\ \text{Rechtskopie der Kante } (v_e, w_e) & \text{falls } \overline{x_e} \text{ j-tes Literal in } z_i \end{cases}$$

durch A-Verbinden

- Zwei Kanten werden mittels eines A-Verbinders verbunden, indem diese durch die fünf oberen bzw. fünf unteren Kanten des A-Verbinders ersetzt werden.

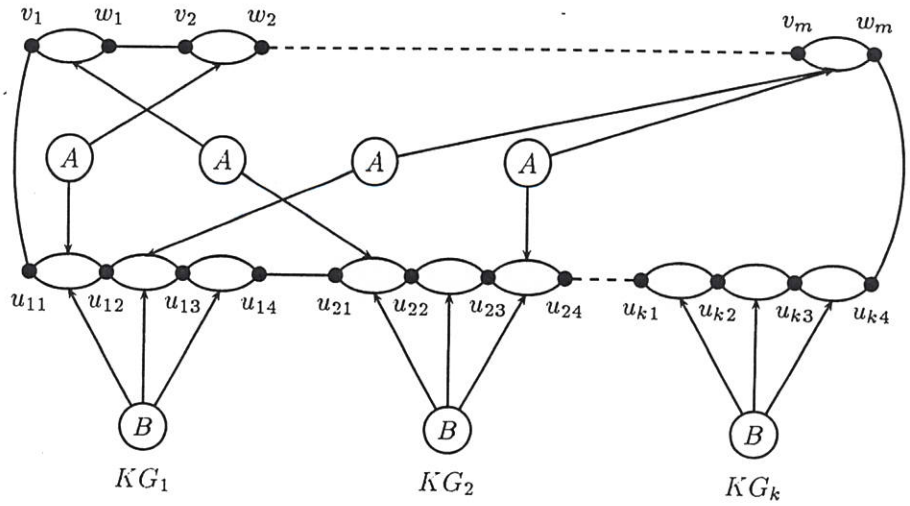


Abbildung 2.8: Der konstruierte Graph $G = (V, E)$.

Transformation kann in Polynomzeit durchgeführt werden.

<u>Beh.:</u>

α erfüllbar $\Leftrightarrow$ G enthält HK.

<u>Bew.:</u>

„$\Rightarrow$"

Sei φ Einsetzung mit $\varphi(\alpha) = 1$.

<u>Ziel:</u> Konstruktion einer HK c.

<u>Konstruktion von c:</u>

1. φ legt $\forall\, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ folgendermaßen fest, welche Kopie der Kante (v_j, w_j) von c durchlaufen wird:

c durchquert die $\begin{cases} \text{Linkskopie von } (v_j, w_j) & \text{falls } \varphi(x_j) = 1 \\ \text{Rechtskopie von } (v_j, w_j) & \text{falls } \varphi(x_j) = 0 \end{cases}$

2. c durchquert (u_{11}, v_1) und (w_m, u_{24}).

3. Da φ den Ausdruck α erfüllt folgt aus Teil 1 der Konstruktion und der Eigenschaft des Graphen A, dass in jedem Klauselgraphen KG_i mindestens eine der Kanten $(u_{ij}, u_{i(j+1)})$ nicht durchlaufen wird. Eigenschaft von B
$\Rightarrow$ c kann demgemäß ergänzt werden.

Insgesamt ist dann c ein HK in G.

"$\Leftarrow$"

Sei c ein HK in G.

$\Rightarrow$

c durchläuft für jedes j exakt eine der Kopien der Kante (v_j, w_j).

<u>Definition von φ:</u>

$$\varphi(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } c \text{ Linkskopie von } (v_j, w_j) \text{ durchquert} \\ 0 & \text{falls } c \text{ Rechtskopie von } (v_j, w_j) \text{ durchquert} \end{cases}$$

noch zu zeigen: $\varphi(\alpha) = 1$, d.h. φ erfüllt jede Klausel Z_i, $1 \le i \le k$.

Betrachte hier im Klauselgraphen KG_i und die korrespondierenden A-Verbinder.

Eigenschaft a) des Graphen B $\Rightarrow$

c kann nicht alle Kanten $(u_{ij}, u_{i(j+1)})$, $1 \leq j \leq 3$ durchlaufen.

<u>Annahme:</u> c durchläuft $(u_{ie}, u_{i(e+1)})$ nicht.

Eigenschaft von A $\Rightarrow$

c muss diejenige Kante durchlaufen, die mit $(u_{ie}, u_{i(e+1)})$ über A-Verbinder verbunden ist.

$\Rightarrow$ Konstruktion

4 erfüllt das korrespondierende Literal in Klausel z_i.

∎

<u>Korollar 6.1</u>

Das Problem des Handlungsreisenden (HR) ist NP-vollständig.

<u>Beweis:</u>

<u>Ziel:</u> Beweis, dass HK ein Spezialfall von HR ist.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

Definiere Kostenfunktion

$$c : V \times V \to \mathbb{N}_0 \quad , \text{ wobei}$$

$$c(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gibt es genau dann eine Rundreise der Länge $|V|$, wenn G einen HK enthält.

$\blacksquare$

Auf die Behandlung NP-vollständiger Probleme kurz eingehen.