Prof. Dr. Norbert Blum
Maria Nikolaidou
Claus Rick

Institut für Informatik, Abt. IV

Vorlesung Informatik III
WS 1998/99
12. Übung

19. 1. 1999

Aufgabe 1:

Sei $T = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| = n > 2$. Zeigen Sie, daß die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. T ist zusammenhängend und besitzt keinen Kreis.
2. T ist kreisfrei und $|E| = n - 1$.
3. T ist zusammenhängend und enthält genau $n - 1$ Kanten.
4. T enthält keinen Kreis, und das Hinzufügen einer beliebigen Kante würde genau einen Kreis kreieren.
5. T ist zusammenhängend, und das Entfernen einer beliebigen Kante würde einen unzusammenhängenden Graphen erzeugen.
6. Jedes Paar von Knoten in T ist durch genau einen Pfad miteinander verbunden.

(6P)

Aufgabe 2:

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $|V| = n$. Ein Knoten $v \in V$ heiße *schwarzes Loch* genau dann, wenn es keine von v ausgehende Kante gibt und für alle Knoten $w \in V \setminus \{v\}$ eine Kante (w, v) existiert. Gegeben sei G durch seine Nachbarschaftsmatrix. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $\mathcal{O}(n)$ an, der testet, ob G ein schwarzes Loch enthält. Begründen Sie insbesondere die Korrektheit Ihrer Methode. Ist ein entsprechender Algorithmus auch möglich, wenn G durch Nachbarschaftslisten gegeben ist? **(4P)**

Aufgabe 3:

Eine topologische Sortierung eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $ord : V \longrightarrow \{1, 2, \ldots, |V|\}$, so daß mit $(v, w) \in E$ auch $ord(v) < ord(w)$ gilt.

a) Zeigen Sie, daß es für G genau dann eine topologische Sortierung gibt, wenn G azyklisch ist. **(1P)**

b) G sei durch seine Nachbarschaftslisten gegeben. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der eine topologische Sortierung für G berechnet, falls G azyklisch ist und sonst einen Zyklus meldet. Welche Laufzeit hat Ihr Verfahren? **(2P)**

Aufgabe 4:

Für zwei Knoten u und v eines ungerichteten und zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ bezeichne die *Distanz* $d(u, v)$ die Länge eines kürzesten Pfades zwischen u und v. Zu einem Knoten $u \in V$ heißt dann für $0 \leq i \leq n-1$ die Menge $S_i(u) := \{v \in V \mid dist(u, v) = i\}$ die i-te *Sphäre* um u.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $\mathcal{O}(|V|+|E|)$ für alle Knoten $v \in V$ berechnet zu welcher Sphäre um u er gehört. **(2P)**

b) Wie könnte man den Algorithmus aus a) modifizieren und erweitern, um zu testen, ob ein gegebener Graph bipartit ist? Die Laufzeit $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ sollte weiterhin eingehalten werden. Vergessen Sie nicht, die Korrektheit Ihres Verfahrens zu begründen!
(Tip: Wieviele Farben benötigt man, um einen bipartiten Graphen zu färben?) **(3P)**

Aufgabe 5:

Die *Inzidenzmatrix* eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine $|V| \times |E|$-Matrix $B = (b_{ij})$ mit

$$b_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{falls die Kante } j \text{ aus dem Knoten } i \text{ herausführt} \\ 1 & \text{falls die Kante } j \text{ in den Knoten } i \text{ hineinführt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Was beschreiben die Einträge des Matrixproduktes $B \cdot B^T$, wobei B^T die Transponierte von B ist? Begründung nicht vergessen! **(2P)**