Prof. Dr. Norbert Blum
Maria Nikolaidou
Claus Rick

Institut für Informatik, Abt. IV

Vorlesung Informatik III
WS 1998/99
5. Übung

17. 11. 1998

Aufgabe 1:

Sei $L = \{w \mid w = vv, v \in \Sigma^+\}$ die Menge aller Wortquadrate über einem endlichen Alphabet Σ.

a) Beschreiben Sie eine nichtdeterministische Turingmaschine, die L in $\frac{3}{2}n + c$ ($n = |w|, c$ konstant) Schritten akzeptiert (Formulierungen wie "Die Turingmaschine rät ..." sind dabei nicht erlaubt). Begründen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens. **(2P)**

b) Beschreiben Sie eine deterministische Turingmaschine, die L akzeptiert und analysieren Sie die Laufzeit dieser Maschine. **(2P)**

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, daß sich jede nichtdeterministische Turingmaschine durch eine nichtdeterministische Turingmaschine simulieren läßt, die in jedem Schritt höchstens zwei zulässige Nachfolgekonfigurationen hat und deren Rechenzeit nur um einen konstanten Faktor größer ist als die der gegebenen Turingmaschine. **(2P)**

Aufgabe 3:

Die formale Definition einer nichtdeterministischen Turingmaschine läßt eine Auswahl für den Übergang in eine der möglichen Nachfolgekonfigurationen an beliebigen Stellen einer Berechnung zu. Der Vorstellung von $\mathcal{NP}$ als Menge derjenigen Probleme, für die eine gegebene Lösung effizient verifiziert werden kann, entspricht jedoch eher einer Turingmaschine, die nur in einer ersten Phase nichtdeterministisch arbeitet, um Lösungskandidaten zu generieren, aber dann in einer zweiten Phase nur noch deterministisch in polynomieller Zeit überprüft, ob der Kandidat tatsächlich eine Lösung war. In der ersten Phase kann eine solche Turingmaschine ausschließlich ein spezielles Band beschreiben, aber keines der anderen Bänder lesen oder beschreiben. Erst in der zweiten Phase erhält diese Maschine den üblichen Zugriff auf alle Bänder einschließlich des in der ersten Phase beschriebenen Bandes. Zeigen Sie, daß eine so eingeschränkte Maschine dennoch jede Aufgabe lösen kann, die eine "normale" nichtdeterministische Maschine lösen kann. **(3P)**

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, daß es zu jeder nichtdeterministischen Turingmaschine M die eine Sprache L bei Laufzeit $t()$ akzeptiert, eine deterministische Turingmaschine M' mit Laufzeit $2^{\mathcal{O}(t())}$ gibt, die ebenfalls L akzeptiert. Beachten Sie, daß M auf Eingaben $x \notin L$ beliebig lange laufen kann, während M' in jedem Fall die vorgegebene Zeitschranke einhalten muß. **(3P)**

Aufgabe 5:

Das *Teilgraphenisomorphieproblem* ist wie folgt definiert. Gegeben seien Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$. Gesucht sind isomorphe Teilgraphen G_1' von G_1 und G_2' von G_2 maximaler Größe. Formulieren Sie dieses Problem als Problem mit ja/nein-Antwort, als Optimierungsproblem und als funktionales Problem. Reduzieren Sie das Optimierungsproblem und das funktionale Problem auf das Problem mit ja/nein-Antwort. **(3P)**

Aufgabe 6:

In dieser Aufgabe geht es darum, zu zeigen, daß das Problem zu entscheiden, ob ein Graph 3-färbbar ist, $\mathcal{NP}$-hart ist. Die Reduktion erfolgt von $SAT(3)$. Sei also $\alpha = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ eine $SAT(3)$-Formel und $\{x_1, \ldots, x_n, \bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n}\}$ die Menge der Literale. Um den zugehörigen Graphen zu konstruieren (diese Konstruktion zu finden ist der wirklich schwierige Teil von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeitsbeweisen) betrachten Sie die folgenden Graphen:

$$\begin{aligned}
G' &= (V', E') \\
V' &= \{a, b\} \cup \{x_i, \bar{x_i} \mid 1 \le i \le n\} \cup \{w_{ij} \mid 1 \le i \le 6, 1 \le j \le m\} \\
E' &= \{(a, b)\} \cup \{(a, x_i), (a, \bar{x_i}), (x_i, \bar{x_i}) \mid 1 \le i \le n\} \\
G_j &= (V_j, E_j),\ 1 \le j \le m \\
V_j &= \{w_{ij} \mid 1 \le i \le 6\} \cup \{\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \sigma_{3j}\} \cup \{b_j\} \\
E_j &= \{(b_j, w_{6j}), (w_{6j}, w_{5j}), (w_{6j}, w_{3j}), (w_{5j}, w_{3j}), (w_{5j}, w_{4j}), (w_{4j}, w_{1j}), (w_{4j}, w_{2j}), \\
&\quad (w_{1j}, w_{2j}), (w_{1j}, \sigma_{1j}), (w_{2j}, \sigma_{2j}), (w_{3j}, \sigma_{3j})\}
\end{aligned}$$

Nun identifiziert man alle Knoten b_j mit dem Knoten b (d.h. alle Knoten, die mit b_j verbunden sind, werden stattdessen mit b verbunden und b_j entfällt). Ebenso werden die Knoten $\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \sigma_{3j}$ mit je einem zu den Literalen der Klausel C_j korrespondierenden Knoten in G' identifiziert. Auf diese Weise erhält man den aus α in polynomieller Zeit konstruierbaren Graphen $G = (V, E)$.

a) Zeichnen Sie den zu $\alpha = (x_1 \vee \bar{x_2} \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x_4} \vee \bar{x_5}) \wedge (\bar{x_1} \vee x_3 \vee x_4)$ Graphen G. **(1P)**

b) Beweisen Sie folgende Aussage über die Graphen G_j: w_{6j} kann mit 1 oder 2 gefärbt werden $\Longleftrightarrow$ nicht alle drei Knoten $\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \sigma_{3j}$ sind mit 0 gefärbt. **(2P)**

c) Zeigen Sie nun: G ist 3-färbbar $\Longleftrightarrow$ α ist erfüllbar. **(2P)**