Prof. Dr. Norbert Blum
Maria Nikolaidou
Claus Rick

Institut für Informatik, Abt. IV

Vorlesung Informatik III
WS 1998/99
6. Übung

24. 11. 1998

Aufgabe 1:

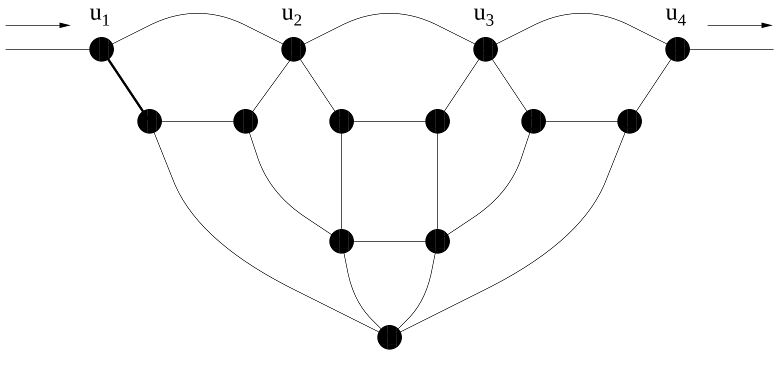
Seien L_1 und L_2 zwei beliebige Sprachen über dem Alphabet Σ, wobei $L_1 \in \mathcal{P}$, $L_2 \neq \emptyset$ und $L_2 \neq \Sigma^*$. Zeigen Sie daß L_1 polynomiell auf L_2 reduzierbar ist. Welche Erkenntnis läßt sich daraus gewinnen? Welche erstaunliche Aussage läßt sich für den Fall, daß $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ ist, über die Sprache $L = \{0, 1\}$ machen? Begründen Sie Ihre Antwort! **(4P)**

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, daß das Problem für einen Graphen zu entscheiden, ob er eine k-Clique enthält, für ein konstantes k in $\mathcal{P}$ ist. Warum ist dies kein Widerspruch zum $\mathcal{NP}$-Vollständigkeitsbeweis der Vorlesung für das Cliqueproblem? **(3P)**

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, daß der nachfolgende Graph nur so von links nach rechts durchquert werden kann (wobei alle Knoten genau einmal besucht werden), daß niemals alle drei Kanten (u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_4) durchlaufen werden, wohl aber jede echte Teilmenge von $\{(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_4)\}$ möglich ist. **(5P)**



Aufgabe 4:

Das sogenannte *Hitting Set Problem* ist wie folgt definiert. Gegeben ist eine Kollektion $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_l\}$ von Teilmengen ($C_i \subseteq S$, $1 \leq i \leq l$) einer Grundmenge S sowie eine positive ganze Zahl K. Die Frage ist nun, ob S ein *hitting set* für C mit höchstens K Elementen enthält, d.h., eine Teilmenge $S' \subseteq S$ mit $|S'| \leq K$, so daß S' mindestens ein Element jeder

Teilmenge in C enthält ($C_i \cap S' \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq l$). Zeigen Sie, daß das *Hitting Set Problem* $\mathcal{NP}$-vollständig ist. **(4P)**
(Tip: Welches in der Vorlesung als $\mathcal{NP}$-vollständig nachgewiesene Problem beschreibt eine recht ähnliche Aufgabenstellung?)

Aufgabe 5:

Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist das Komplement $\bar{L}$ definiert als $\bar{L} = \Sigma^* \backslash L$. Wir definieren nun die Komplexitätsklasse $co\mathcal{NP}$ als $co\mathcal{NP} := \{\bar{L} \mid L \in \mathcal{NP}\}$ (Achtung: $co\mathcal{NP}$ ist nicht das Komplement von $\mathcal{NP}$). Bisher ist nicht bekannt, ob $\mathcal{NP}$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, d.h., ob $co\mathcal{NP} = \mathcal{NP}$ oder $co\mathcal{NP} \neq \mathcal{NP}$ gilt.

a) Welche Schlußfolgerung zur $\mathcal{P}?\mathcal{NP}$ Frage könnte man jeweils aus $co\mathcal{NP} = \mathcal{NP}$ bzw. $co\mathcal{NP} \neq \mathcal{NP}$ ziehen? **(1P)**

b) Zeigen Sie, daß $co\mathcal{NP} = \mathcal{NP}$ genau dann gilt, falls es eine $\mathcal{NP}$-vollständige Sprache L gibt, deren Komplement $\bar{L}$ ebenfalls in $\mathcal{NP}$ ist. **(2P)**

c) Versuchen Sie, für ein Ihnen bekanntes $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem plausibel zu machen, daß das Komplement nicht in $\mathcal{NP}$ liegt. **(1P)**