Prof. Dr. Norbert Blum
Maria Nikolaidou
Claus Rick

Institut für Informatik, Abt. IV

Vorlesung Informatik IV
SS 1999
6. Übung

18. Mai 1999

Aufgabe 5:

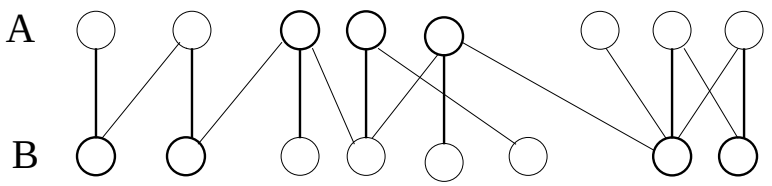
Eine überdeckende Knotenmenge eines Graphen enthält für jede Kante des Graphen mindestens einen der Endknoten (erinnern Sie sich, daß das Problem in einem beliebigen ungerichteten Graphen eine minimale überdeckende Knotenmenge zu finden $\mathcal{NP}$-hart ist). Zeigen Sie, daß in einem bipartiten Graphen die Größe eines maximalen Matchings gleich der Größe einer minimalen überdeckenden Knotenmenge ist. **(2P)**

Musterlösung

Für einen bipartiten Graphen $G = (A, B, E)$ sei im folgenden immer C eine minimale überdeckende Knotenmenge und M ein maximales Matching. Also ist zu zeigen, daß $|M| = |C|$.

Es ist klar, daß $|M| \leq |C|$ gilt, da zu jeder Matchingkante mindestens einer der Endknoten in einer überdeckenden Knotenmenge enthalten sein muß (verschiedene Matchingkanten haben gemäß Definition keine gemeinsamen Endknoten).

Um zu zeigen, daß in einem bipartiten Graphen $|M|$ Knoten zur Überdeckung aller Kanten auch ausreichen, konstruieren wir zu einem gegebenen maximalen Matching M eine überdeckende Knotenmenge, in die genau einer der beiden Endknoten jeder Matchingkante aufgenommen wird. Wir betrachten dazu drei Teilgraphen.



Teil 1

Betrachte alle M-freien Knoten in A. Jede von einem solchen Knoten ausgehende Kante muß mit einem Knoten in B verbunden sein, der Endpunkt einer Matchingkante ist (sonst könnten wir M einfach eine Matchingkante hinzufügen, was der Maximalität von M widerspricht). Diese Knoten aus B fügen wir unserer überdeckenden Knotenmenge hinzu und haben damit u.a. alle von den M-freien Knoten in A ausgehenden Kanten überdeckt. Allerdings dürfen wir nun nicht mehr die anderen Endknoten in A der korrespondierenden Matchingkanten verwenden (wir wollen pro Matchingkante ja nur genau einen Endpunkt in die überdeckenden Knotenmenge aufnehmen). Zur Überdeckung von von diesen Knoten ausgehenden Kanten argumentieren wir analog zu oben. Sie müssen wieder mit Knoten in B verbunden sein, die Endpunkt einer Matchingkante sind (falls nicht hätten wir einen augmentierenden Pfad gefunden und damit einen Widerspruch zur Maximalität von M). Entweder dieser Knoten gehört schon zu unserer überdeckenden Knotenmenge (dann wird die Kante schon überdeckt) oder wir nehmen ihn zur überdeckenden Knotenmenge hinzu. Dieses Verfahren wird solange wie möglich iteriert. Alle bisher zur überdeckenden Knotenmenge hinzugefügten Knoten sind Knoten aus B.

Teil 2

Mittels eines symmetrischen Verfahrens, das mit allen M-freien Knoten aus B startet, fügt man Knoten aus A zur überdeckenden Knotenmenge hinzu. Wie können wir sicher sein, daß wir nun nicht beide Endknoten einer Matchingkante hinzugefügt haben? Angenommen dies wäre der Fall, dann hätten wir doch einen augmentieren Pfad gefunden: er startet bei einem M-freien Knoten in A und führt über die Matchingkante, für die wir nach Annahme beide Endknoten aufgenommen haben zu einem M-freien Knoten in B. Dabei wechseln sich Nicht-Matchingkanten und Matchingkanten ab. Ein augmentierender Pfad widerspricht jedoch wieder der Maximalität von M. Also ist die Annahme, daß wir beide Knoten einer Matchingkante aufgenommen haben falsch. Es kann auch keine Nicht-Matchingkante zwischen einem Knoten in A aus Teil 1 und einem Knoten in B aus Teil 2 (diese wäre noch nicht überdeckt) geben; man hätte wieder einen augmentierenden Pfad gefunden.

Teil 3

Wir haben jedoch u. U. noch nicht alle Kanten überdeckt, nämlich solche, die von Knoten ausgehen, die nicht über alternierende Pfade von M-freien Knoten aus A bzw. B erreicht werden. Diese Knoten sind also insbesondere selbst nicht M-frei. Wir fügen zur überdeckenden Knotenmenge nun entweder alle zu den verbliebenen Matchingkanten korrespondierenden Knoten aus A oder alle aus B hinzu. Da beide Endknoten der verbliebenen Nicht-Matchingkanten zu einer Matchingkante adjazent sind, werden auch diese Nicht-Matchingkanten von den gewählten Knoten überdeckt.

Insgesamt haben wir also pro Matchingkante genau einen Knoten gewählt und mit Hilfe dieser Knoten alle Kanten des Graphen überdeckt.