Prof. Dr. Norbert Blum
Maria Nikolaidou
Claus Rick

Institut für Informatik, Abt. IV

Vorlesung Informatik IV
SS 1999
3. Übung
27. April 1999

Aufgabe 1:

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T, U, a, b\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und P wie folgt: $S \to aS$, $S \to TU$, $S \to ab$, $S \to \varepsilon$, $T \to b$, $T \to Tb$, $T \to ab$, $T \to \varepsilon$, $U \to b$.

a) Das Wort **aabb** hat mehrere Ableitungen. Wieviele? Geben Sie alle an. Wieviele Linksableitungen gibt es? **(1P)**

b) Geben Sie zu jeder der unter a) gefundenen Ableitungen den zugehörigen Ableitungsbaum an. Welche Ableitungen haben den gleichen Ableitungsbaum? **(1P)**

c) Zeigen Sie, daß es in jeder beliebigen kontextfreien Grammatik G für jedes Wort $x \in L(G)$ eine Linksableitung gibt. **(1P)**

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die beiden kontextfreien Grammatiken $G_1 = (\{S, A, B, a, b\}, \{a, b\}, P_1, S)$ und $G_2 = (\{S, A, B, a, b\}, \{a, b\}, P_2, S)$ mit den Produktionen

$$P_1 \ : \ S \to aB, S \to bA, A \to a, A \to aS, A \to bAA, B \to b, B \to bS, B \to aBB$$
$$P_2 \ : \ S \to aBS, S \to aB, S \to bAS, S \to bA, A \to bAA, A \to a, B \to aBB, B \to b \quad .$$

a) Beide Grammatiken erzeugen die gleiche Sprache. Welche ist das? Beweis! **(3P)**

b) Eine der beiden Grammatiken ist mehrdeutig. Welche ist das? Begründen Sie Ihre Antwort! **(1P)**

Aufgabe 3:

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G für die Sprache

$$L = \{u\$v \mid u, v \in \{a, b\}^*, u^R \text{ ist Teilstring von } v\}$$

über dem Alphabet $\{a, b, \$\}$ an. Hierbei bezeichnet u^R das Spiegelwort von u (z.B. ist für $u = abb$ $u^R = bba$). Weisen Sie insbesondere formal nach, daß wirklich $L = L(G)$ für die von Ihnen angegebene Grammatik G gilt. **(3P)**

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, daß es zu jeder kontextfreien Sprache $L \neq \emptyset$ eine reduzierte Grammatik G mit $L(G) = L$ gibt. **(1P)**

b) Zeigen Sie, daß eine kontextfreie Grammatik G nicht notwendigerweise in eine reduzierte Grammatik überführt wird, wenn man zunächst den Algorithmus ERREICH und erst dann den Algorithmus PROD anwendet. **(2P)**

Aufgabe 5:

Finden Sie mit Hilfe der Algorithmen PROD und ERREICH eine kontextfreie Grammatik, die äquivalent zur Grammatik mit den folgenden Produktionen ist: $S \to AB|CA$, $B \to BC|AB$, $A \to a$, $C \to aB|b$. **(2P)**

Aufgabe 6:

a) Die Größe einer Grammatik $G = (V, \Sigma, S, P)$ ist definiert durch

$$|G| := |V| + \sum_{A \to \alpha \in P} |A\alpha| \quad .$$

Geben Sie eine $\mathcal{O}(|G|)$-Implementierung des Algorithmus PROD an.
(Tip: Können Sie in der Vorgehensweise des Algorithmus eine typische Graphdurchmusterungsmethode wiedererkennen?) **(2P)**

b) Beweisen Sie formal die Korrektheit des Algorithmus PROD.
(Tip: Schleifeninvariante aufstellen, Induktionsbeweis, ...) **(3P)**