Prof. Dr. Norbert Blum
Maria Nikolaidou
Claus Rick

Institut für Informatik, Abt. IV

Vorlesung Informatik IV
SS 1999
6. Übung

18. Mai 1999

Aufgabe 1:

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, daß die Sprache

$$L = \{0^{i^2} \mid i \geq 1 \text{ eine natürliche Zahl}\},$$

die alle Folgen von Nullen enthält, deren Länge ein perfektes Quadrat darstellt, nicht regulär ist. **(2P)**

Aufgabe 2:

Gegeben sei die kontextfreie Sprache $L = \{a^i b^j c^k \mid \text{Entweder } i = 0 \text{ oder } j = k\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L = L(G)$ an (ohne formalen Beweis, aber mit Erläuterungen). **(1P)**

b) Begründen Sie, weshalb man durch direkte Anwendung des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen *nicht* zeigen kann, daß L *nicht* regulär ist. **(3P)**

c) Zeigen Sie, daß L nicht regulär ist. (Hinweis: Konstruieren Sie durch Anwendung der Abschlußeigenschaften für reguläre Sprachen aus L eine Sprache L', die auch regulär sein müßte, wenn L regulär ist.) **(2P)**

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, daß die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind.

a) $L_1 = \{a^i b^j a^i b^j \mid i, j \geq 0\}$ (Pumping Lemma). **(2P)**

b) $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i \leq j \leq k\}$ (Pumping Lemma). **(2P)**

c) $L_3 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ (Abschlußeigenschaft + a)). **(2P)**

Aufgabe 4:

Ein Matching heißt *nicht erweiterbar*, wenn keine Kante hinzugenommen werden kann, ohne die Matchingeigenschaft zu verletzen (um die Anzahl der Augmentierungsschritte eines Algorithmus zur Berechnung eines *maximalen* Matchings zu vermindern, könnte man z.B. mit einem solchen sehr effizient berechneten nicht erweiterbaren Matching starten, anstatt mit der leeren Menge).

a) Konstruieren Sie einen Graphen, der ein maximales Matching der Größe 10 und ein nicht erweiterbares Matching, das aus lediglich 5 Kanten besteht, enthält. **(2P)**

b) Entwickeln Sie einen Algorithmus, der in linearer Zeit ein nicht erweiterbares Matching berechnet. Diskutieren Sie Situationen, in denen das von Ihrem Algorithmus konstruierte nicht erweiterbare Matching einem maximalen Matching besonders nahe kommt bzw. von einem maximalen Matching besonders weit entfernt ist. **(2P)**

Aufgabe 5:

Eine überdeckende Knotenmenge eines Graphen enthält für jede Kante des Graphen mindestens einen der Endknoten (erinnern Sie sich, daß das Problem in einem beliebigen ungerichteten Graphen eine minimale überdeckende Knotenmenge zu finden $\mathcal{NP}$-hart ist). Zeigen Sie, daß in einem bipartiten Graphen die Größe eines maximalen Matchings gleich der Größe einer minimalen überdeckenden Knotenmenge ist. **(2P)**