Prof. Dr. Norbert Blum
Maria Nikolaidou
Claus Rick

Institut für Informatik, Abt. IV

Vorlesung Informatik IV
SS 1999
9. Übung

15. Juni 1999

Aufgabe 1:

Sei $G = (V, E, w)$ ein ungerichteter, gewichteter Graph mit paarweise unterschiedlichen Kantengewichten. Zeigen Sie, daß G genau einen minimalen überspannenden Baum besitzt, indem Sie allgemeiner nachweisen, daß ein Graph einen eindeutigen Spannbaum besitzt, wenn es zu jedem Schnitt des Graphen eine eindeutige Kandidatskante gibt. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, daß die Umkehrung dieser Aussage nicht gilt. **(4P)**

Aufgabe 2:

Prof. Sabatier vermutet, daß auch die folgende Umkehrung von Satz 7.12 der Vorlesung gilt:

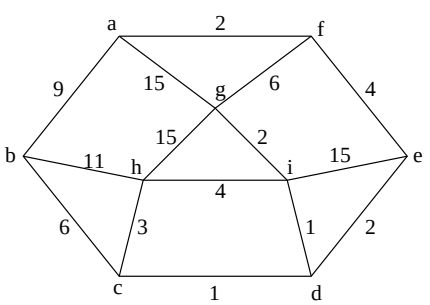
> Sei $G = (V, E, w)$ ein gewichteter, ungerichteter Graph. Sei $\tilde{A} \subseteq E$ eine Kantenmenge, so daß es einen minimalen überspannenden Baum $T = (V, A, w)$ von G mit $\tilde{A} \subset A$ gibt. Sei $(S, V \setminus S)$ ein beliebiger Schnitt von G, der $\tilde{A}$ respektiert und (u, v) eine sichere Kante bzgl. $\tilde{A}$, die den Schnitt kreuzt. Dann ist (u, v) eine Kandidatskante (d.h. hat minimales Gewicht unter allen Kanten, die den Schnitt $(S, V \setminus S)$ kreuzen).

Beweisen Sie diese Vermutung oder widerlegen Sie sie mit einem Gegenbeispiel. **(2P)**

Aufgabe 3:

a) Betrachten Sie den folgenden gewichteten Graphen. Protokollieren Sie den Ablauf des Algorithmus von Kruskal. **(2P)**

b) Protokollieren Sie den Ablauf des Algorithmus von Prim (Startknoten a). **(2P)**



Aufgabe 4:

a) Beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus von Prim. **(3P)**

b) Skizzieren Sie eine effiziente Implementierung des Algorithmus von Prim und analysieren Sie die Laufzeit. **(2P)**

Aufgabe 5:

Führen Sie das maximale Matching in bipartiten Graphen auf ein maximales Flußproblem zurück. D.h., definieren Sie zu einem gegebenen (ungerichteten und ungewichteten) bipartiten Graphen $G = (A, B, E)$ ein korrespondierendes Flußnetzwerk $G' = (V', E')$ und zeigen Sie, daß ein Matching in G direkt zu einem (ganzzahligen) Fluß in G' korrespondiert. Folgern Sie dann mit Hilfe des Integrality Theorems, daß ein maximales Matching in G zu einem maximalen Fluß in G' korrespondiert. **(5P)**