4. Das kürzeste gemeinsame Superstringproblem (KGS)

gegeben: Strings $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \Sigma^+$ für ein endliches Alphabet Σ.

gesucht: ein kürzester String s, so dass jedes s_i, $1 \leq i \leq m$ ein Teilstring von s ist.

KGS ist NP-vollständig

(siehe: J.A. Storer: Data Compression: Methods and Theory, Computer Science Press 1988, p. 211 ff.)

$\Rightarrow$

Approximationsalgorithmen sind sinnvoll.

Literatur:

J. Tarhio, E. Ukkonen: A greedy approximation algorithm for constructing shortest common superstrings, TCS 57 (1988), 131 - 145.

J.S. Turner: Approximation algorithms for the shortest common superstring problem, Information and Computation 83 (1989), 1 - 20.

A. Blum, T. Jiang, M. Li, J. Tromp, M. Yannakakis: Linear approximation of shortest superstrings, JACM 41 (1994), 630 - 647.

D. Breslauer, T. Jiang, Z. Jiang: Rotations of periodic strings and short superstrings, J. Algorithms 24 (1997), 340 - 353.

Z. Sweedyk: A $2\frac{1}{2}$ - approximation algorithm for shortest superstring, SIAM J. Comput. 29 (1999), 954 - 986.

Bezeichnungen:

Seien $p, q \in \Sigma^*$. v heißt Überlappung von p und q, falls $p = p'v$ und $q = vq'$ für $p', q' \in \Sigma^*$. v heißt maximale Überlappung von p und q, falls v die Überlappung maximaler Länge von p und q ist. Wir schreiben dann

$$p \circ q := p'vq'.$$

Wir sagen, dass eine Menge von Strings reduziert ist, falls kein String dieser Menge Teilstring eines anderen Strings dieser Menge ist. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass die Menge S der Strings, für die wir einen Superstring konstruieren möchten, reduziert ist.

Übung:

Gegeben sei eine Menge S von Strings. Entwickeln sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der aus S mittels Entfernen von Strings, die Teilstrings von in der Menge verbleibenden Strings sind, eine reduzierte Menge S' von Strings konstruiert. Welche Laufzeit hat ihr Algorithmus?

Idee:

Bestimme ein Paar p, q von Strings mit größter maximaler Überlappung. Bilde $p \circ q$ und ersetze beide

Strings durch $p \circ q$.

$\rightsquigarrow$

Algorithmus GREEDY

Eingabe: $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\} \subseteq \Sigma^*$, $|\Sigma|$ endlich.

Ausgabe: Superstring $s \in \Sigma^+$ bzgl S. D.h., s_i ist Teilstring von s für $1 \leq i \leq m$.

Methode:

(1) $R := S$;

(2) **while** $|R| > 1$

do

Wähle $p, q \in R$, $p \neq q$, $q \neq p$ mit größter maximaler Überlappung;

$r := p \circ q$;

$R := (R \cup \{r\}) \setminus \{p, q\}$

od;

(3) Gib R aus.

Die Korrektheit folgt direkt aus der Konstruktion und ist leicht zu beweisen. Noch offen sind

1) effiziente Implementierung
2) Analyse der Güte der Ausgabe.

Implementierung:

Zunächst berechnen wir für alle Paare $(s_i, s_j) \in S^2$ die maximale Überlappung. Falls S nicht reduziert ist, dann können wir gleichzeitig aus S alle Strings

entfernen, die Teilstrings eines anderen in S sind.

Berechnung der Überlappungen:

Betrachten wir $(s_i, s_j) \in S^2$.

Ziel:

- Berechnung der maximalen Überlappung von s_i und s_j.
- Entscheidung, ob $s_j \subseteq s_i$ oder nicht.

Beobachtung:
Obige Zielsetzung ist ähnlich zum üblichen String-matchingproblem. Da wir auch entscheiden möchten, ob $s_j \subseteq s_i$, ist es auch nicht einfacher.

$\Rightarrow$
Zur Lösung des Problems können wir übliche String-matchingalgorithmen verwenden.

z.B. Knuth-Morris-Pratt

benötigte Zeit $O(|s_i| + |s_j|)$

insgesamt $\forall$ Paare $(s_i, s_j) \in S^2$:

$$O\Big(\sum_{1 \le i \ne j \le m} (|s_i| + |s_j|)\Big)$$

$$= O(m \cdot n),$$

wobei $n := \sum_{1 \le i \le m} |s_i|$.

Sortieren der Paare nach Größe der Überlappungen:

benötigte Zeit:

Verwendung von Bucketsort: $O(m^2)$

Verwendung von Mergesort: $O(m^2 \cdot \log m)$

Modifikation $R := (R \cup \{p \circ q\}) \setminus \{p, q\}$

Ersetze in der sortierten Liste

- jedes Paar (q, s') durch $(p \circ q, s')$
- jedes Paar (s', p) durch $(s', p \circ q)$

und entferne jedes Paar (p, s') bzw. (s', q).

Beobachtung:
Da R reduziert ist, bleiben die Überlappungswerte in den neuen Paaren erhalten. Es ist daher auch korrekt, dass wir die Paare (p, s') und (s', q) aus der Liste entfernen. Da p und q längste maximale Überlappung haben, ist die verbleibende Liste auch reduziert.

benötigte Zeit: $O(m)$

insgesamt: $O(m^2)$.

Wir haben folgenden Satz bewiesen:

Satz 4.1
Der Algorithmus GREEDY benötigt $O(m \cdot n)$ Zeit, wobei m die Anzahl der Strings in der Eingabe und n die Summe der Stringlängen sind.

Es verbleibt noch die Analyse der Approximationsgüte. Wir werden zunächst zeigen, dass die Approximationsgüte nicht besser als zwei sein kann.

Betrachten wir

$$S := \{ ab^h, b^h b, b^h a \}.$$

$\Rightarrow$

Der kürzeste gemeinsame Superstring ist dann

$$s := a b^h b a.$$

GREEDY kann den Superstring

$$s' := a b^h a b^h b$$

konstruieren. Es gilt

$$|s| = h+3 \quad \text{und} \quad |s'| = 2h+3.$$

und

$$\frac{|ab^h a b^h b|}{|a b^h b a|} \xrightarrow{h \to \infty} 2.$$

$\Rightarrow$

$\nexists$ Konstante $c < 2$ mit der Eigenschaft, dass GREEDY die Approximationsgüte c hat.

Übung: (Beispiel)
Für obigen produziert GREEDY möglicherweise eine Ausgabe, deren Länge das Doppelte der minimalen Länge ist. Modifizieren Sie das Beispiel derart, dass GREEDY immer eine derartige Ausgabe produziert.

Vielerorts wird folgende Vermutung, die nach wie vor offen ist, geäußert:

GREEDY hat Approximationsgüte zwei.

Bis 1991 ist es nicht gelungen, für irgendeinen Approximationsalgorithmus für KGS eine konstante Approximationsgüte zu beweisen. Dies gelang 1991 erstmals Avrim Blum et al. Im Jahr 1995 hat Elisabeth Sweedyk in ihrer Dissertation für einen Approximationsalgorithmus die Approximationsgüte 2,5 bewiesen, was nach wie vor den Rekord darstellt.

Ziel:
Entwicklung der Methode von Avrim Blum et al.

Bezeichnungen:
Seien $s,t \in \Sigma^+$ (nicht notwendigerweise verschieden). Sei $v \in \Sigma^*$ der längste String, so dass $s = uv$ und $t = vw$ für nichtleere Strings u und w (d.h., $u,w \in \Sigma^+$).

- $ov(s,t) := |v|$ Überlappung zwischen s und t.
- $pref(s,t) := u$ Präfix von s bzgl. t
- $d(s,t) := |pref(s,t)|$ Distanz von s nach t
- $pref(s,t) \cdot t = uvw$ Merge von s und t.

Bemerkung:
- $pref(s,t) \cdot t$ ist der kürzeste Superstring von s und t, in dem die Einbettung von s strikt vor der Ein=

bettung von t beginnt. Es gilt:

$$|pref(s,t)\cdot t| = d(s,t) + |t| = |s| + |t| - ov(s,t).$$

- Falls $ov(s,s) > 0$, dann gibt es eine <u>selbstüber-lappung</u> von s.

<u>Beispiel:</u>

$s :=$ undergrounder

Es gilt:

$ov(s,s) = 5$, $pref(s,s) =$ undergro, $d(s,s) = 8$.

Seien $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_r} \in \Sigma^+$. Dann ist der super-string $s := \langle s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_r} \rangle$ definiert durch

$$s := pref(s_{i_1}, s_{i_2}) \cdot pref(s_{i_2}, s_{i_3}) \cdot \ldots \cdot pref(s_{i_{r-1}}, s_{i_r}) \cdot s_{i_r}.$$

D.h., s ist der kürzeste String mit der Eigenschaft, dass $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_r}$ in dieser Ordnung in dem String erscheinen.

<u>Übung:</u>

Zeigen Sie, dass für eine reduzierte Menge von Strings für jede Ordnung obiger String wohldefiniert ist.

Bezeichne für den Superstring s $first(s)$ den als ersten und $last(s)$ den als letzten eingebetteten String. D.h., $first(s) := s_{i_1}$ und $last(s) := s_{i_r}$.

Lemma 4.1

Seien $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ eine reduzierte Menge von Strings und s ein kürzester Superstring von S. Dann existiert eine Permutation π von $\{1, 2, \ldots, m\}$ mit $s = \langle s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}, \ldots, s_{\pi(m)} \rangle$.

Beweis:

Da S reduziert ist, gilt für alle $s_i, s_j \in S$, $i \neq j$, $s_i \not\subseteq s_j$. Wenn wir s von links nach rechts betrachten, dann erscheinen die Strings aus S in einer festen Ordnung. Wegen $s_i \not\subseteq s_j$ $\forall i, j$ mit $i \neq j$ sind die Anfangspositionen dieser Strings verschieden. Also definiert diese Ordnung eine Permutation π.

2.2.: $s_{\pi(i)}$ und $s_{\pi(i+1)}$, $1 \leq i < m$ haben in s maximale Überlappung.

Dies folgt direkt aus der Minimalität von $|s|$. Andernfalls könnten wir s an der Stelle $s_{\pi(i)}, s_{\pi(i+1)}$ noch zusammenschieben. ∎

Gegeben $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ definieren wir einen kantengewichteten, gerichteten Graphen $G_S = (V, E, d)$ durch

$V := \{1, 2, \ldots, m\}$,
$E := \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq m, i \neq j\}$ und
$d : E \to \mathbb{N}_0$, wobei $d(i, j) := d(s_i, s_j)$.

G_S heißt Distanzgraph bzgl. S.

Erinnerung:
Eine Rundreise durch einen Graphen $G_S = (V, E, d)$ ist ein einfacher Kreis in G_S, auf dem jeder Knoten in V liegt. Das Handlungsreisendenproblem (HRP) ist das Finden einer bzgl. den Kantengewichten kürzesten Rundreise.

Bezeichne $HRP(G_S)$ die Länge einer kürzesten Rundreise in G_S und $OPT(S)$ die Länge eines kürzesten Superstrings von S. Dann gilt:

$$HRP(G_S) \leq OPT(S) - ov(last(s), first(s)) \leq OPT(S),$$

wobei last(s) bzw. first(s) den letzten bzw. ersten String in einem kürzesten Superstring s bezeichnet.

$\Rightarrow$
Die Länge einer kürzesten Rundreise in G_S bildet eine untere Schranke für die Länge eines kürzesten Superstrings bzgl. S.

Idee:
Berechne eine kürzeste Rundreise in G_S und schneide diese optimal auf.

Aber: HRP ist selbst NP-vollständig.

$\rightsquigarrow$
Betrachten wir folgendes ganzzahlige lineare Programm LP, in dem wir für jede Kante $(i,j) \in E$

eine Variable x_{ij} verwenden. In einer zulässigen Lösung für LP hat x_{ij} folgenden Wert:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \text{ in Lösung} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{LP: } \min \; z = \sum_{(i,j) \in E} d(i,j) \cdot x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{ganzzahlig} \qquad 1 \leq i, j \leq m$$

<u>Eigenschaften von LP:</u>

1) Jede Rundreise R in G_s bildet eine zulässige Lösung für LP.

2) Jede zulässige Lösung für LP besteht aus einer Menge $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$ von einfachen Kreisen, so dass jeder Knoten in V in exakt einem Kreis enthalten ist.

3) Das durch LP spezifizierte Problem, das so genannte Assignmentproblem ist in P.

4) Bezeichne $CYC(G_s)$ das Gewicht eines minimalen Assignments für G_s. Dann gilt:

$$CYC(G_S) \leq HRP(G_S) \leq OPT(S).$$

$\Rightarrow$

Folgender Approximationsalgorithmus bietet sich an:

Algorithmus CONCAT-CYCLES

Eingabe: $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$, S reduziert

Ausgabe: Superstring s für S.

Methode:

(1) Kreiere den Distanzgraphen $G_S = (V, E, d)$ und konstruiere ein Assignment C minimalen Gewichts auf G_S.
Sei $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$ die berechnete Kollektion von Kreisen.

(2) Für jeden Kreis $c_i = i_0 \to i_1 \to i_2 \to \ldots \to i_{r-1} \to i_0$ sei $\tilde{s}_i := \langle s_{i_0}, s_{i_1}, \ldots, s_{i_{r-1}} \rangle$ derjenige String, den wir durch Öffnen des Kreises zwischen i_0 und i_{r-1} erhalten. Dabei ist i_0 beliebig gewählt.

(3) Bilde
$$s := \tilde{s}_1 \cdot \tilde{s}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{s}_p.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass der Algorithmus CONCAT-CYCLES einen Superstring für S ausgibt.

Ziel:
Analyse der Approximationsgüte des Algorithmus CONCAT-CYCLES.

Um dieses Ziel zu erreichen, entwickeln wir zunächst eine Theorie bzgl. der berechneten Kreise.

Bezeichnungen:

- Zwei Strings s und t heißen äquivalent ($s \equiv t$), falls der eine String ein zyklischer Shift des anderen Strings ist. D.h., $\exists u, v \in \Sigma^*$ mit $s = uv$ und $t = vu$.

  $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation. (überzeugen sie sich.)

- Sei c ein gerichteter einfacher Kreis in G_S mit Knoten $i_0, i_1, \ldots, i_{r-1}$ in dieser zyklischen Ordnung auf c. Sei $pref(i,j) := pref(s_i, s_j)$ der mit der Kante (i,j) assoziierte String. Dann bezeichnet Strings(c) die Äquivalenzklasse

  $$[pref(i_0,i_1) \cdot pref(i_1,i_2) \cdot \ldots \cdot pref(i_{r-1}, i_0)].$$

  Strings(c, i_k) bezeichnet denjenigen Repräsentanten von Strings(c), der mit $pref(i_k, i_{k+1})$ startet. D.h., den String

  $$pref(i_k, i_{k+1}) \cdot pref(i_{k+1}, i_{k+2}) \cdot \ldots \cdot pref(i_{k-1}, i_k),$$

  wobei die Indizes modulo r gerechnet werden.

- Für $k > 0$ sagen wir, dass eine Äquivalenzklasse $[s]$ die Periodizität k besitzt, wenn s invariant unter einer Rotation von k

Buchstaben ist. D.h.,

$$s = u \cdot v = v \cdot u, \quad \text{wobei } |u| = k.$$

Folgendes Lemma fasst einige Eigenschaften von Periodizitäten zusammen.

Lemma 4.2

a) $[s]$ hat die Periodizität $|s|$.

b) Wenn $[s]$ die Periodizitäten a und b besitzt, dann hat $[s]$ auch die Periodizität $ggt(a,b)$.

c) Die minimale Periodizität von $[s]$ ist gleich der Anzahl der verschiedenen Rotationen von s und somit gleich der Größe $card(s)$ der Äquivalenzklasse $[s]$.

d) Alle Periodizitäten von $[s]$ sind Vielfache der minimalen Periodizität von $[s]$.

Beweis:

Übung

■

Bezeichnungen:

- Sei $i_0 \to i_1 \to i_2 \to \dots \to i_{r-1} \to i_0$ ein gerichteter Kreis c mit Knoten $i_0, i_1, \dots, i_{r-1}$. Dann ist $w(c) := |s|$, $s \in Strings(c)$ das Gewicht des Kreises c.

  Interpretation: $w(c)$ ist die Länge des Kreises c.

- Wenn j ein Knoten auf dem Kreis c ist, dann sagen wir "s_j ist in c" oder auch "$s_j \in c$".

Seien im folgenden $c = i_0 \to i_1 \to i_2 \to \dots \to i_{r-1} \to i_0$ und c' Kreise in G_S. Zunächst werden wir einige Eigenschaften von Kreisen in G_S herleiten.

Lemma 4.3

Seien $s \in Strings(c)$ und k groß genug. Dann ist jeder String $s_{ij} \in c$ ein Teilstring von s^k.

Beweis:

Nachfolgend werden wir Knoten und korrespondierende Strings identifizieren. Was gemeint ist ergibt sich aus dem Kontext.

Konstruktion $\Rightarrow$

s_{ij} ist Präfix von

$$pref(i_j, i_{j+1})\, pref(i_{j+1}, i_{j+2}) \cdot \dots \cdot pref(i_{j+\ell-1}, i_{j+\ell}) \cdot s_{i_{j+\ell}}$$

$\forall\, \ell \geq 0$ (bzgl. Addition modulo r).

Seien

$$k := \left\lceil \frac{|s_{ij}|}{w(c)} \right\rceil \quad \text{und} \quad \ell := k \cdot r$$

$\Rightarrow$

s_{ij} ist Präfix von

$$pref(i_j, i_{j+1}) \cdot \dots \cdot pref(i_{j+kr-1}, i_{j+kr}) = Strings(c, i_j)^k$$

Also folgt die Behauptung aus der Eigenschaft, dass $Strings(c, i_j)^k$ ein Teilstring von s^{k+1} für beliebiges $s \in Strings(c)$ ist. ∎

Lemma 4.4

Sei jeder String in einer reduzierten Menge $\{s_1, s_2, \ldots, s_e\}$ von Strings Teilstring von s^k für einen String $s \in Strings(c)$ und genügend großes k. Dann existiert ein Kreis vom Gewicht $|s|$, der alle Strings in $\{s_1, \ldots, s_e\}$ enthält.

Beweis:

Da $\{s_1, s_2, \ldots, s_e\}$ reduziert ist, gilt für $i \neq j$

- s_i und s_j starten in verschiedenen Positionen in s.

Wir betrachten denjenigen Kreis, den wir aus s erhalten, indem wir Anfang und Ende von s konkatenieren.

Die Startpositionen der Strings $s_1, s_2, \ldots, s_e$ auf dem Kreis definieren eine zirkuläre Ordnung dieser Strings. Die Distanzen aufeinanderfolgenden Strings addieren sich zu $|s|$, was das Gewicht dieses Kreises ist. ∎

Lemma 4.5

Der Superstring $\langle s_{i_0}, s_{i_1}, \ldots, s_{i_{r-1}} \rangle$ ist ein Teilstring von $Strings(c, i_0)\, s_{i_0}$.

Beweis:

$\langle s_{i_0}, s_{i_1}, \ldots, s_{i_{r-1}} \rangle$ ist ein Teilstring von

$$\langle s_{i_0}, s_{i_1}, \ldots, s_{i_{r-1}}, s_{i_0} \rangle = pref(i_0, i_1) \cdot \ldots \cdot pref(i_{r-1}, i_0)\, s_{i_0}$$

$$= Strings(c, i_0)\, s_{i_0}.$$

■

Lemma 4.6

Falls $Strings(c') = Strings(c)$, dann existiert ein Kreis $\tilde{c}$ mit

i) $w(\tilde{c}) = w(c)$ und
ii) $\tilde{c}$ enthält alle Knoten in c und alle Knoten in c'.

Beweis:

Folgt direkt aus den Lemmata 4.3 und 4.4.

■

Übung:
Arbeiten Sie den Beweis von Lemma 4.6 aus.

Lemma 4.7
Es existiert ein Kreis $\tilde{c}$ vom Gewicht $card(Strings(c))$, der alle Knoten in c enthält.

Beweis:

Sei $s \in Strings(c)$ beliebig aber fest. Sei u der kleinste nichtleere Präfix von s, so dass

$$s = uv = vu \quad \text{für ein } v \in \Sigma^*.$$

Folgendes kann leicht mittels Induktion bewiesen werden:

$$k := |u| \text{ teilt } w(c) \text{ und } s = u^j \text{ für } j := \frac{w(c)}{k}.$$

Da k minimal gewählt wurde, gilt:

$$\text{card}(\text{Strings}(c)) = k.$$

Die Anwendung des Lemmas 2.4. bzgl. u ergibt dann die Behauptung. ∎

Zum Beweis der Approximationsgüte des Algorithmus CONCAT-CYCLES benötigen wir noch ein Lemma, das eine obere Schranke für die mögliche Überlappung zweier Strings aus verschiedenen Kreisen angibt.

Lemma 4.8

Seien c und c' zwei Kreise in einem Assignment C minimalen Gewichtes. Seien $s \in c$ und $s' \in c'$. Dann gilt $ov(s,s') < w(c) + w(c')$.

Beweis:

Annahme:

s und s' überlappen in einem String u mit $|u| \geq w(c) + w(c')$.

Bezeichne

$$u_{i,j} := u_i u_{i+1} \cdots u_j.$$

Beobachtung:

- $Strings(c) \neq Strings(c')$. Andernfalls könnte man gemäß Lemma 4.6 ein Assignment geringeren Gewichtes mittels Kombination der Kreise c und c' konstruieren, was ein Widerspruch zur Minimalität von C wäre.
- Lemma 4.7 $\Rightarrow$ $w(c) \leq card(Strings(c))$.
- Wegen $|u| > w(c)$ bzw. $|u| > w(c')$ können wir $x \in Strings(c)$ bzw. $x' \in Strings(c')$ wie folgt wählen:

$$x := u_{1,w(c)} \quad \text{und} \quad x' := u_{1,w(c')}.$$

Wegen $Strings(c) \neq Strings(c')$ gilt auch $w(c) \neq w(c')$. O.B.d.A. sei $w(c) > w(c')$.

Dann kann wegen $|u| \geq w(c) + w(c')$ $u_{1,w(c)}$ wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} u_{1,w(c)} &= u_{1+w(c'),\, w(c)+w(c')} \\ &= u_{1+w(c'),\, w(c)}\, u_{w(c)+1,\, w(c)+w(c')} \\ &= u_{1+w(c'),\, w(c)}\, u_{1,w(c')} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$Strings(c)$ hat Periodizität

$$w(c') < w(c) \leq card(Strings(c)).$$

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass card(Strings(c)) die minimale Periodizität von Strings(c) ist.

$\Rightarrow \quad |u| < w(c) + w(c')$.

■

Satz 4.2

Der Algorithmus CONCAT-CYCLES berechnet einen Superstring s der Länge $\leq 4 \cdot OPT(S)$.

Beweis:

Da das berechnete Assignment $C := \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$ ein optimales Assignment ist, gilt:

$$CYC(G_S) = \sum_{i=1}^{p} w(c_i) \leq OPT(S).$$

Eine weitere untere Schranke für OPT(S) ergibt sich wie folgt:

Für jeden Kreis c_i, $1 \leq i \leq p$ bezeichne

$w_i := w(c_i)$ und
l_i die Länge eines längsten Strings in c_i.

Lemma 4.8 $\Rightarrow$

Falls wir aus jedem Kreis einen längsten String nehmen und alle p Strings optimal durch einen Superstring repräsentieren, dann ist die Gesamtüberlappung

$$\leq 2 \cdot \sum_{i=1}^{p} w_i .$$

$\Rightarrow$

Der Super-String hat mindestens die Länge

$$\sum_{i=1}^{p} (l_i - 2w_i) .$$

Also gilt:

$$OPT(S) \geq \max \left\{ \sum_{i=1}^{p} w_i , \sum_{i=1}^{p} (l_i - 2w_i) \right\} .$$

Lemma 4.5 $\Rightarrow$

$$|S| \leq \sum_{i=1}^{p} (l_i + w_i) .$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} |S| &\leq \sum_{i=1}^{p} (l_i + w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} (l_i - 2w_i) + \sum_{i=1}^{p} 3 \cdot w_i \\ &\leq \quad OPT(S) \quad + 3\,OPT(S) \\ &= \quad 4\,OPT(S). \end{aligned}$$

■

Im Algorithmus CONCAT-CYCLES können wir zur Berechnung des optimalen Assignments c auf Standardverfahren zurückgreifen. Jedoch besitzt der aus der Eingabe $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ konstruierte Graph

Eigenschaften, die die Entwicklung eines einfachen Greedyalgorithmus zur Berechnung eines optimalen Assignments zulassen.

Hierzu betrachten wir anstelle des originalen Problems "Berechnung eines Assignments minimalen Gewichtes im Distanzgraphen" das hierzu duale Problem "Berechnung eines Assignments maximalen Gewichts im Überlappungsgraphen".

Gegeben $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ definieren wir einen kantengewichteten Graphen $G'_S := (V, E, ov)$ durch

$V := \{1, 2, \ldots, m\}$,
$E := \{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq m, i \neq j\}$ und
$ov: E \to \mathbb{N}_0$, wobei $ov(i,j) = ov(s_i, s_j)$.

G'_S heißt <u>Überlappungsgraph</u> bzgl. S.

Wir präsentieren nun den Greedyalgorithmus und zeigen dann, dass dieser nichts anderes tut, als den Algorithmus CONCAT-CYCLES nachzuahmen, woraus sich unmittelbar die Approximationsgüte des Greedyalgorithmus ergibt.

<u>Algorithmus</u> MGREEDY

<u>Eingabe:</u> $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$, S reduziert.

<u>Ausgabe:</u> Superstring s für S.

Methode:

(1) $R := S$; $T := \emptyset$;

(2) while $R \neq \emptyset$

do

Wähle $s, t \in R$ (nicht notwendigerweise verschieden), so dass $ov(s,t)$ maximal ;

if $s \neq t$

then

$R := (R \cup \{s \circ t\}) \setminus \{s, t\}$

else

$R := R \setminus \{s\}$;

$T := T \cup \{s\}$

fi

od ;

(3) $s :=$ Konkatenation der Strings in T.

Interpretation:

- MGREEDY wählt Strings s und t mit maximaler Überlappung, wobei durchaus $s = t$ sein kann und wählt dann in G'_S die gerichtete Kante von last(s) nach first(t).

  $\Rightarrow$

  MGREEDY konstruiert und verbindet Pfade in G'_S und schließt diese dann zu Kreise. Am Schluss enthält T eine Kollektion M von disjunkten Kreisen, die die Knoten in G'_S überdecken.

Sei M das durch MGREEDY konstruierte Assignment.

- Wir können die Verfahrensweise von MGREEDY auch wie folgt interpretieren:

  MGREEDY erhält eine Liste der Kanten in E, sortiert in monoton fallender Ordnung bzgl. ihrer Überlappung und arbeitet diese von links nach rechts ab.

Wir sagen, dass <u>eine Kante e eine andere Kante e' dominiert</u>, falls e links von e' in der Liste steht und e und e' denselben Start- oder denselben Endknoten haben.

<u>Es gilt</u>:
Wenn MGREEDY eine Kante e' in der Liste betrachtet, dann wählt MGREEDY genau dann diese Kante e' aus, wenn MGREEDY nicht bereits vorher eine Kante e, die e' dominiert, ausgewählt hat.

<u>Satz 4.3</u>
Das durch den Algorithmus MGREEDY konstruierte Assignment M ist ein optimales Assignment für G_S.

<u>Beweis</u>:
Die Distanzgewichte und die Überlappungsgewichte eines jeden Assignments addieren sich zur Gesamt-

länge aller Strings.

$\Rightarrow$

Ein Assignment ist genau dann optimal in G_S, wenn es maximale Gesamtüberlappung hat

Unter allen Assignments mit maximaler Gesamt-Überlappung sei N eines, welches eine Maximalanzahl von Kanten mit M gemeinsam hat.

Ziel: Beweis, dass $M = N$.

Folgendes Lemma liefert den Schlüssel für den Beweis:

Lemma 4.8
Seien u, u^+, v^- und v nicht notwendigerweise verschiedene Strings, so dass

$$ov(u,v) \geq \max\{ ov(u,u^+), ov(v^-,v) \}.$$

Dann gilt:

$$ov(u,v) + ov(v^-,u^+) \geq ov(u,u^+) + ov(v^-,v) \text{ und}$$
$$d(u,v) + d(v^-,u^+) \leq d(u,u^+) + d(v^-,v).$$

Interpretation:
Wenn wir die Wahl haben, u und u^+ sowie v^- und v anstatt u und v sowie v^- und u^+ zu überlappen, dann ist die beste Wahl solche, die ein Paar mit größter Überlappung enthält.

Bevor wir Lemma 4.9 beweisen, führen wir den Beweis von Satz 4.3 zu Ende.

Annahme: $M \neq N$

Sei e diejenige Kante mit maximaler Überlappung in $N \setminus M \cup M \setminus N$, die als erste in der Liste von MGREEDY erscheint. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $e \in N \setminus M$

MGREEDY wählt nicht die Kante e $\Rightarrow$

$\exists$ Kante e', die e dominiert und gewählt wird.

N Assignment $\Rightarrow e' \notin N$

Also gilt $e' \in M \setminus N$

Widerspruch zur Wahl der Kante e.

2. Fall: $e := (k,j) \in M \setminus N$.

Betrachten wir die Kanten (i,j) und (k,e) in N, die Start- bzw. Endknoten mit e gemeinsam haben.

$(k,j) \in M \Rightarrow (i,j), (k,e) \notin M$.

$\Rightarrow$

(k,j) dominiert (i,j) und auch (k,e).

Also folgt hieraus und der Wahl von $e = (k,j)$

$$ov(k,j) \geq \max\{ov(i,j), ov(k,l)\}.$$

Lemma 4.8 $\Rightarrow$)

$$ov(i,j) + ov(k,e) \leq ov(k,j) + ov(i,e)$$

$\Rightarrow$)

Der Austausch der Kanten (i,j), (k,e) in N durch die Kanten (k,j) und (i,e) ergibt ein Assignment N' mit

- N' hat mindestens eine Kante mehr als N mit M gemeinsam und
- N' hat keine geringere Überlappung als N.

Widerspruch zur Wahl von N. ■

Beweis von Lemma 4.8:

Es genügt die erste Ungleichung zu beweisen. Wegen

$$d(s,t) + |t| = |s| + |t| - ov(s,t) \quad \forall s,t$$

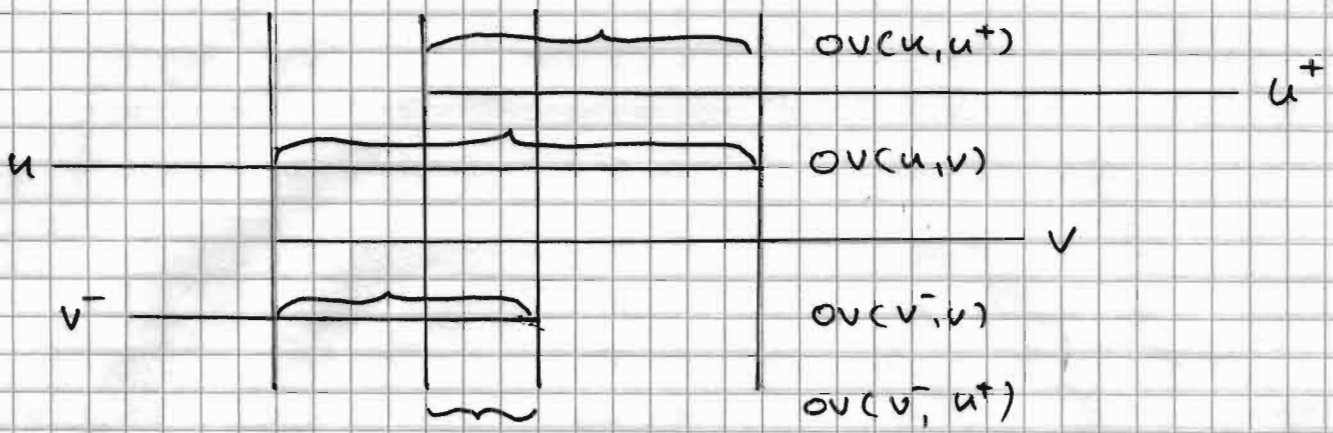
folgt dann aus dieser

$$d(u,v) + d(v^-,u^+) \leq d(u,u^+) + d(v^-,v).$$

zu zeigen

$$ov(u,v) + ov(v^-,u^+) \geq ov(u,u^+) + ov(v^-,v).$$

Folgendes Bild verdeutlicht die Situation:



Es gilt:

$$ov(u,v) \geq ov(u,u^+) + ov(v^-,v) - ov(v^-,u^+)$$

$$(\Rightarrow ov(u,v) + ov(v^-,u^+) \geq ov(u,u^+) + ov(v^-,v)$$

■

Da MGREEDY ein optimales Assignment findet und die Kreise alle in der optimalen Position aufsucht, gilt:

Der durch MGREEDY konstruierte Superstring ist nicht länger als der durch CONCAT-CYCLES konstruierte Superstring.

Also folgt direkt aus Satz 4.2 der folgende Satz:

Satz 4.4

MGREEDY berechnet einen Superstring s der Länge $\leq 4 \cdot OPT(S)$.

Beobachtung:

MGREEDY konkateniert einfach alle Strings in T ohne weitere Kompression.

Diese Beobachtung wirft direkt folgende Frage auf:

Frage:
Falls wir versuchen, die Strings in T geschickt zu überlappen, können wir dann eine bessere Approximationsgüte als 4 erreichen?

Bezeichne TGREEDY denjenigen Approximationsalgorithmus, den wir erhalten, indem wir in MGREEDY

(3) s := Konkatenation der Strings in T

durch

(3') S := Ausgabe von GREEDY bei Eingabe T

ersetzen.

Satz 4.5
TGREEDY berechnet einen Superstring s der Länge $\leq 3 \cdot OPT(S)$.

Beweis:
Seien $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ die Eingabe von TGREEDY und s der von TGREEDY berechnete Superstring. Sei $n := OPT(S)$.

Ziel: Beweis, dass $|s| \leq 3 \cdot n$.

Seien

T die von TGREEDY in Schritt (2) berechnete Menge von "selbstüberlappenden" Strings.

C das korrespondierende Assignment.

$c_x \in C$ der zum String $x \in T$ korrespondierende Kreis

w_x Gewicht $w(c_x)$ des Kreises $c_x \in C$

$\|R\| := \sum_{x \in R} |x|$, wobei R eine Menge von Strings ist.

$w := \sum_{x \in T} w_x$.

Wegen $CYC(G_S) \leq HRP(G_S) \leq OPT(S)$ gilt:

$$w \leq n.$$

Lemma 4.8 $\Rightarrow$

(*) Die Kompression, die in einem kürzesten Superstring für T erreicht wird, ist $< 2 \cdot w$

Folgendes Lemma gibt eine untere Schranke für die Kompression, die GREEDY bei T erreicht, an.

<u>Lemma 4.10</u>

Sei $S := \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ eine Menge von Strings. Bezeichne $OV_{opt}(S)$ die Überlappung in einem kürzesten Superstring für S und $OV_{GREEDY}(S)$ die vom Algorithmus GREEDY erzielte Überlappung. Dann gilt:

$$OV_{GREEDY}(S) \geq \tfrac{1}{2} OV_{opt}(S).$$

Bevor wir Lemma 4.10 beweisen, führen wir den Beweis von Satz 4.5 zu Ende.

Bezeichne n_T die Länge eines kürzesten Superstrings für T. D.h.,

$$OV_{OPT}(T) = \|T\| - n_T .$$

Ferner gilt:

$$OV_{GREEDY}(T) = \|T\| - |s| ,$$

wobei s die Ausgabe von T_{GREEDY} ist.

Lemma 4.10 $\Rightarrow$

$$OV_{GREEDY}(T) \geq \frac{1}{2} OV_{OPT}(T)$$

$$\Leftrightarrow \|T\| - |s| \geq \frac{\|T\| - n_T}{2}$$

$$= \|T\| - n_T - \frac{\|T\| - n_T}{2}$$

$$\underset{(*)}{\geq} \|T\| - n_T - w$$

$$\Leftrightarrow |s| \leq n_T + w$$

Ziel:
Ermittlung einer möglichst kleinen oberen Schranke für n_T.

Bezeichnungen:

Für $x \in T$ sei s_{i_x} derjenige String in $c_x \cap S$, der Präfix von x ist.

Seien

$$S' := \{ s_{i_x} \mid x \in T \},$$

$n' := OPT(S')$,

$S'' := \{ Strings(C_x, i_x) s_{i_x} \mid x \in T \}$ und

$n'' := OPT(S'')$.

Lemma 4.5 $\Rightarrow$

Ein Superstring für S'' ist auch ein Superstring für T.

$\Rightarrow$

$$n_T \leq n''.$$

Für eine Permutation π der Strings in T bezeichne s'_π bzw. s''_π denjenigen Superstring, den wir mittels Überlappung der Strings in S' bzw. S'' in der durch π definierten Anordnung erhalten.

Beobachtung:

$\forall\, x \in T$ gilt: Der String $Strings(C_x, i_x) s_{i_x}$ fängt mit s_{i_x} an und hört mit s_{i_x} auf.

$\Rightarrow$

$\forall$ Permutationen π der Strings in T gilt:

$$|s''_\pi| \leq |s'_\pi| + \sum_{x \in T} w_x$$

$$= |s'_\pi| + w.$$

Betrachten wir eine Permutation π_0 mit $|s'_{\pi_0}| = n'$. Wegen Lemma 4.1 existiert π_0.

Dann gilt:

$$n' + w = |S'_{\pi_0}| + w$$
$$\geq |S''_{\pi_0}|$$
$$\geq n''!$$

Ferner gilt: $S' \subseteq S \Rightarrow n' \leq n$.

Insgesamt erhalten wir

$$n_T \leq n'' \leq n' + w \leq n + w.$$

Die Kombination mit $|S| \leq n_T + w$ ergibt dann

$$|S| \leq n_T + w \leq n + 2w \leq 3n.$$

■

Beweis des Lemmas 4.10:

GREEDY wählt beim j-ten Durchlauf des Blockes der while-Schleife aus der aktuellen Menge R_{j-1} der noch zu verarbeitenden Strings p_j und q_j mit maximaler Überlappung aus, bildet $p_j \circ q_j$ und führt die Modifikation $R_j := (R_{j-1} \cup \{p_j \circ q_j\}) \setminus \{p_j, q_j\}$ durch.

Bezeichne $OV_j(S)$, $0 \leq j < m$ die in einem Superstring maximaler Überlappung, der alle Überlappungen $p_i \circ q_i$, $1 \leq i \leq j$ enthält, erzielte Überlappung.

Dann gilt:

$$OV_0(S) = OV_{OPT}(S).$$

Idee: Wir beweisen für $0 < j < m$

$$OV_{j-1}(S) \leq OV_j(S) + 2|p_j \sqcap q_j|$$

Dann erhalten wir

$$OV_{OPT}(S) = OV_0(S) \leq \sum_{j=1}^{m-1} 2|p_j \sqcap q_j|$$
$$= 2 \cdot \sum_{j=1}^{m-1} |p_j \sqcap q_j|$$
$$= 2\, OV_{GREEDY}(S).$$

Durchführung:

Hierzu fixieren wir einen Superstring $\bar{S}$ maximaler Überlappung unter all denjenigen Superstrings, die die Überlappungen $p_i \sqcap q_i$, $1 \leq i < j$ enthalten.

Sei $\ddot{u}(\bar{S})$ die Menge der Überlappungen in $\bar{S}$.

Wahl von p_j, q_j $\Rightarrow$

$$|p_j \sqcap q_j| = \max\{|p \sqcap q| \mid p, q \in R_{j-1},\ p \neq q\}.$$

Die Wahl der Überlappung $p_j \sqcap q_j$ durch GREEDY macht maximal drei Überlappungen in $\ddot{u}(\bar{S})$ unzulässig. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: Maximal zwei Überlappungen werden unzulässig.

Dann folgt direkt aus der Maximalität von $|p_j \sqcap q_j|$, dass

$$OV_{j-1}(S) \leq OV_j(S) + 2|p_j \sqcap q_j|.$$

2. Fall: Drei Überlappungen werden unzulässig.

Dann sind diese Überlappungen von folgenden Arten:

- eine der Form $p_j \sqcap q_t$, $q_t \neq q_j$,
- eine der Form $p_t \sqcap q_j$, $p_t \neq p_j$.
- Die dritte Überlappung würde einen Kreis schließen. D.h., irgendeine Überlappung $\tilde{p} \sqcap \tilde{q}$ auf dem Kreis wird unzulässig.

Beobachtung:
Nach Wahl der Überlappung $p_j \sqcap q_j$ und der Entfernung der Überlappung $\tilde{p} \sqcap \tilde{q}$ ist die Überlappung $p \sqcap q$ zulässig. D.h. $p \sqcap q$ schließt keinen Kreis. Wäre dies der Fall, dann hätte es bereits vorher einen Kreis gegeben.

Also gilt:

$$(*)\quad OV_{j-1}(S) \leq OV_j(S) + |p_j \sqcap q_t| + |p \sqcap q_j| + |\tilde{p} \sqcap \tilde{q}| - |p \sqcap q|$$

Lemma 8 $\Rightarrow$

$$|p_j \sqcap q_j| + |p \sqcap q| \geq |p_j \sqcap q| + |p \sqcap q_j|$$

$$(**) \Leftrightarrow \quad |p_j \sqcap q_j| \geq |p_j \sqcap q| + |p \sqcap q_j| - |p \sqcap q|$$

$(*)$ und $(**)$ $\Rightarrow$

$$OV_{j-1}(S) \leq OV_j(S) + 2\,|p_j \sqcap q_j|,$$

womit das Lemma bewiesen ist. ∎

Avrim Blum et al. haben in ihrer Arbeit bewiesen, dass GREEDY ein 4-Approximationsalgorithmus für das Superstringproblem ist. Hierzu genügt es nicht, die für MGREEDY entwickelte Beweismethode auf GREEDY zu übertragen. Sie erläutern in ihrer Arbeit ausführlich, warum dies nicht funktioniert und geben dann eine kompliziertere Analyse, aus der sich die Approximationsgüte 4 ergibt, an. In

H. Kaplan, N. Shafrir: The greedy algorithm for shortest superstrings, IPL 93 (2005), 13-17.

wird im Beweis von Avrim Blum et al. mit Hilfe eines von Breslauer, Jiang und Jiang entwickelten Lemmas eine obere Schranke verbessert, wodurch sich der Wert 4 für die Approximationsgüte auf den Wert 3,5 reduziert.