Logik und Diskrete Strukturen

0. Einführung

Wir werden uns im wesentlichen mit

- Mengen, Relationen und Funktionen,
- Logik und
- Beweise

beschäftigen. Dabei interessieren wir uns u.a. für folgende Fragen:

- Was sind Mengen?
- Was kann man mit Mengen machen?
- Wie beschreibt man Mengen
- Wie entscheidet man, ob ein gegebenes Objekt in einer gegebenen Menge ist?
- Wie operiert man auf Mengen.
- Was ist ein Beweis?
- Welche allgemeine Beweistechniken sollte man kennen?
- Wie führt man einen Beweis?

Wir werden uns auch mit der Berechenbarkeit von Funktionen beschäftigen. Darüber hinaus werden wir grundlegende Mengenverwaltungsprobleme und Datenstrukturen und Algorithmen zur effizienten Lösung dieser kennenlernen.

Literatur:

Harry R. Lewis, Christos H. Papadimitriou, Elements of the Theory of Computation, Prentice Hall 1981.

Christos H. Papadimitriou, Computational Complexity, Addison-Wesley 1994.

Jürgen Dassow, Logik für Informatiker, Vieweg + Teubner 2005.

Uwe Schöning, Logik für Informatiker, 5. Aufl., Spektrum 2000.

Stasys Jukna, Crashkurs Mathematik für Informatiker, Teubner 2008.

Norbert Blum, Einführung in Formale Sprachen, Berechenbarkeit, Informations- und Lerntheorie, Oldenbourg 2007.

Norbert Blum, Algorithmen und Datenstrukturen, Oldenbourg 2004.

Inhalt:

4. Datenstrukturen zur Lösung von Mengen=verwaltungsproblemen

4.1 Einfache Datenstrukturen

4.2 Bäume

4.2.1 Beliebige Suchbäume

4.2.2. AVL-Bäume

4.2.3 B-Bäume

4.2.4 Tries

4.3 Hashing

4.3.1 Kollisionsbehandlung mittels ver=ketteter Listen

4.3.2 Kollisionsbehandlung mittels offener Adressierung

4.4 Datenstrukturen für disjunkte Mengen

4.5 Priority Queues

1. Mengen, Relationen und Funktionen

1.1 "Wenn ... dann ..." und verwandtes

In der Mathematik beschäftigt man sich u.a. mit wahren und falschen Aussagen und mit den Beziehungen zwischen Aussagen. Hierbei verwendet man häufig die deutsche Sprache, jedoch auf eine präzisere Art und Weise als im Alltag.

Beispiel 1.1

"Das Wort "Kaffeetasse" enthält mehr "e" als "s"."

oder

"Das Wort "Kaffeetasse" enthält mindestens soviele "e" wie "s"."

oder

"Das Wort "Kaffeetasse" enthält mindestens soviele "x" wie "y"."

◆

Alle drei Aussagen sind offensichtlich wahr. Dabei beschreibt die erste Aussage die Situation präziser als die zweite, was allerdings keinen Einfluss auf den Wahrheitswert der zweiten Aussage hat. Da das Wort "Kaffeetasse" weder ein "x" noch ein "y" enthält, ist auch die dritte Aussage wahr, auch wenn diese nicht sinnvoll zu sein scheint.

Mittels Bindewörter können zwei Aussagen zu einer einzigen Aussage kombiniert werden. Dabei ergibt sich der Wahrheitswert der kombinierten Aussage aus den Wahrheitswerten der einzelnen Aussagen. Wir werden nun einige häufig verwendeten Kombinationen diskutieren. Seien hierbei p und q zwei Aussagen.

a) p und q bzw. p oder q

p und q ist $\begin{cases} \text{wahr} & \text{falls p wahr und q wahr} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$

p oder q ist $\begin{cases} \text{wahr} & \text{falls mindestens eine der Aussagen p und q wahr} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$

b) wenn p dann q

wenn p dann q ist $\begin{cases} \text{wahr falls p falsch oder q wahr ist.} \\ \text{falsch sonst} \end{cases}$

D.h., wenn wir Fallunterscheidung bzgl. dem Wahrheitswert von p machen, dann ergibt sich:

<u>1. Fall</u> p wahr

Damit "wenn p dann q" wahr ist, muss auch die Aussage q wahr sein.

<u>2. Fall</u> p falsch

Dann ist "wenn p dann q", unabhängig vom Wahrheitswert von q, wahr.

<u>Bemerkung</u>:
Der Wahrheitswert von "wenn p dann q" hängt nur von den Wahrheitswerten von p bzw. q ab. Es besteht keine Notwendigkeit zu überprüfen, ob die Verknüpfung von p mit q "sinnvoll" ist oder nicht.

Häufig werden Aussagen über Klassen von Objekten gemacht. Hierzu verwendet man Symbole, die für ein beliebiges Objekt der betrachteten Klasse stehen. Bezeichne z.B. x ein beliebiges Wort der deutschen Sprache

<u>Beispiel 1.2</u>

"Wenn x mehr "e" als "s" hat, dann enthält x mindestens ein "e"."

<u>Beh.:</u> Die Aussage des Beispiels 1.2 ist wahr.

<u>Bew.:</u>

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1, x enthält nicht mehr "e" als "s".

Dann impliziert obiger 2. Fall, dass die Aussage wahr ist.

2, x enthält mehr "e" als "s".

x kann nicht weniger als null s enthalten. Also muss x mindestens nächste Zahl größer als null viele e enthalten. Also enthält x mindestens ein e. D.h., die Aussage ist wahr.

∎

Falls der wenn-Teil einer "wenn... dann..."-Aussage unter keinem Umstand wahr sein kann, dann ist die "wenn... dann..."-Aussage <u>nichtssagend</u> wahr.

<u>Beispiel 1.3</u>

Seien a_1 und a_2 zwei Buchstaben und $n(a_1)$ und $n(a_2)$ zwei Zahlen.

"Wenn x $n(a_1)$ Buchstaben a_1, $n(a_2)$ Buchstaben a_2 enthält und $n(a_1) < n(a_2)$ dann ent=

hält x mindestens $n(a_1) + n(a_2)$ Buchstaben."

◆

<u>Beh.</u>: Die Aussage des Beispiels 1.3 ist wahr.

<u>Bew.</u>:

Wir müssen nur den Fall, dass die wenn-Aussage wahr ist, näher untersuchen.

Falls a_1 und a_2 d. selbe Buchstabe sind, dann gilt $n(a_1) = n(a_2)$ und die wenn-Aussage ist falsch.

Falls a_1 und a_2 verschiedene Buchstaben sind, dann enthält x $n(a_1)$ Buchstaben a_1 und $n(a_2)$ Buchstaben a_2, insgesamt also mindestens $n(a_1) + n(a_2)$ Buchstaben.

■

Wir können "wenn p dann q" auch folgendermaßen interpretieren:

Falls diese Aussage wahr ist, dann ist es unmöglich, dass gleichzeitig p wahr und q falsch sind.

D.h., um zu beweisen, dass "wenn p dann q" wahr ist, können wir annehmen, dass q falsch und p wahr sind und dies zu einen <u>Widerspruch</u> führen.

Beispiel 1.4

"Wenn $x^2 = 0$ dann $x = 0$."

Beh.: Die Aussage des Beispiels 1.4 ist wahr.

Bew.:

Annahme: $x^2 = 0$ aber $x \neq 0$

Dann gilt entweder $x > 0$ oder $x < 0$. Aber

wenn $x > 0$ dann $x^2 > 0$ und
wenn $x < 0$ dann $x^2 > 0$.

In beiden Fällen gilt $x^2 > 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $x^2 = 0$.

$\blacksquare$

Die Aussage

"p allein wenn q"

meint dasselbe wie

"wenn p dann q."

Beispiel 1.5

Seien x und y ganze Zahlen. Dann meint

"$x + y$ ist ungerade allein wenn eine der Zahlen x und y ungerade sind"

dasselbe wie

"wenn $x+y$ ungerade ist, dann ist eine der Zahlen x und y ungerade",

was eine wahre Aussage ist.

◊

Auch

"q wenn p"

meint dasselbe wie

"wenn p dann q".

<u>Beispiel 1.5</u> (Fortführung)

Obige Aussage kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

"x oder y ist ungerade wenn $x+y$ ungerade".

◊

Häufig kombiniert man die Aussagen

"p allein wenn q" (d.h. "wenn p dann q")

und

"p wenn q" (d.h. "wenn q dann p")

zu folgender Aussage

"p genau dann wenn q"

Damit diese Aussage wahr ist müssen entweder p und q wahr oder p und q falsch sein.

D.h., p und q sind in exakt denselben Situationen wahr.

Zum Beweis, dass eine "p genau dann wenn q"-Aussage wahr ist, teilt man diese auf und beweist beide Teile seperat.

<u>Beispiel 1.5</u> (Fortführung)

"

x+y ist ungerade genau dann wenn exakt eine der Zahlen x und y ungerade ist."

<u>Beh.:</u> Die letzte Aussage des Beispiels 1.5 ist wahr.

<u>Bew.:</u>

Wir zerlegen obige Behauptung wie folgt:

a) Wenn exakt eine der Zahlen x und y ungerade ist, dann ist x+y ungerade.

b) Wenn x+y ungerade ist, dann ist exakt eine der Zahlen x und y ungerade.

Bew. von a):

Exakt eine der Zahlen ist ungerade impliziert, dass wir beide Zahlen wie folgt schreiben können: $2m$ und $2n+1$.

Es gilt $2m + 2n + 1 = 2(m+n) + 1$ ist ungerade.

Bew. von b):

<u>Annahme</u>: $x + y$ ist ungerade aber entweder beide oder keine der Zahlen ist ungerade

Beide Fälle in der Annahme können wir direkt zum Widerspruch führen.

<u>1.2 Mengen</u>

Eine <u>Menge</u> ist eine Zusammenfassung von Objekten. Zum Beispiel ist die Zusammenfassung der vier Buchstaben a, b, c und d einer Menge, die wir L nennen können. Wir schreiben dann

$$L := \{a, b, c, d\}$$

Mengenklammer

Aufzählung aller Objekte in L

Lies: "L wird definiert als"

Die Objekte in L heißen <u>Elemente</u> der Menge L.

Zum Beispiel ist b ein Element der Menge L (in Symbolen: $b \in L$). Manchmal sagen wir hierfür b <u>ist in</u> L oder auch L <u>enthält</u> b.
Andererseits ist z kein Element der Menge L (in Symbolen: $z \notin L$)

Die Elemente einer Menge müssen nicht zueinander in irgendeine Beziehung stehen. So ist zum Beispiel

$$\{ 5, \text{Apfel}, \text{rot}, \{ \text{blau}, 3 \} \}$$

eine Menge mit vier Elementen, wovon ein Element selbst eine Menge ist.

In Mengen unterscheiden wir nicht Wiederholungen von Elementen. D.h., die Mengen $\{3, 7, 5, 3\}$ und $\{3, 7, 5\}$ sind identisch. Auch ist die Reihenfolge der Elementen in Mengen unwesentlich. So bezeichnen $\{3, 7, 5\}$, $\{5, 3, 7\}$ und $\{7, 5, 3\}$ dieselbe Menge. Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Es gibt eine Menge, die keine Elemente enthält, die sogenannte <u>leere Menge</u> (in Symbolen $\emptyset$). Jede andere Menge ist <u>nichtleer</u>.

Bisher haben wir eine Menge durch die Aufzählung ihre Elemente spezifiziert. Dies ist bei Mengen, die unendlich viele Elemente enthalten, nicht möglich. Derartige Menge heißen <u>unendlich</u>. Zum Beispiel ist $\mathbb{N}$, die Menge der natürlichen Zahlen, unendlich. Zwar können wir $\mathbb{N}$ durch

$$\mathbb{N} := \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

unter Verwendung von drei Punkten und unserer Intuition, wie die Aufzählung fortzusetzen ist, spezifizieren, jedoch gibt es viele unendliche Mengen, wo dies nicht möglich ist. (Hierzu später mehr). Eine Menge, die nicht unendlich ist, ist <u>endlich</u>.

Eine weitere Möglichkeit für die Spezifikation einer Menge ist die Bezugnahme auf andere Mengen und auf Eigenschaften, die die Elemente der Menge haben oder nicht haben.

<u>Beispiel 1.6</u>:

Seien $I := \{1, 3, 9\}$ und $G := \{3, 9\}$. Dann kann G als die Menge derjenigen Elemente der Menge I, die größer als 2 sind, beschrieben werden. Wir schreiben dann

$$G := \{x \mid x \in I \text{ und } x \text{ größer als } 2\}.$$

Im allgemeinen können wir, falls eine Menge A definiert ist und P eine Eigenschaft ist, die Elemente von A haben oder nicht haben, eine neue Menge B definieren durch

$$B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \text{ hat Eigenschaft } P\}.$$

So kann z.B. die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen spezifiziert werden durch

$$U := \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } x \text{ ist nicht teilbar durch } 2\}.$$

Eine Menge A ist eine Teilmenge einer Menge B, falls jedes Element von A auch ein Element von B ist. Wir schreiben dann

$$A \subseteq B.$$

Wir sagen dann auch, dass A in B enthalten ist.

Beispiel 1.6 (Fortführung)

Es gilt

$$G \subseteq \mathbb{Z} \quad \text{und auch} \quad U \subseteq \mathbb{N}.$$

◇

Bemerkung:
Gemäß unserer Definition ist jede Menge Teilmenge von sich selbst.

Falls A Teilmenge von B und $A \neq B$, dann sagen wir, dass A eine echte Teilmenge von B ist. Wir schreiben dann

$$A \subsetneq B.$$

Bemerkung:

Die leere Menge $\emptyset$ ist eine Teilmenge von jeder Menge.

Um zu beweisen, dass zwei Mengen A und B gleich sind, genügt es $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ zu be=

weisen. Jedes Element von A ist dann auch ein Element von B und umgekehrt. D.h., A und B haben dieselben Elemente und somit gilt gemäß Definition

$$A = B.$$

Mittels verschiedenen <u>Mengenoperationen</u> können wir zwei Mengen zur Bildung einer dritten Menge kombinieren:

Die <u>Vereinigung</u> zweier Mengen A und B ist diejenige Menge, deren Elemente in mindestens einer der Mengen A und B enthalten sind. Wir verwenden das Symbol $\cup$ um die Vereinigung zu bezeichnen. Wir erhalten somit

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

<u>Beispiel 1.6</u> (Fortführung):

$$\{1,3,9\} \cup \{3,5,7\} = \{1,3,9,5,7\}$$

◇

Der <u>Durchschnitt</u> zweier Mengen A und B ist diejenige Menge, deren Elemente in beiden Mengen A und B enthalten sind. Das Symbol $\cap$ bezeichnet den Durchschnitt. Somit erhalten wir

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Beispiel 1.6 (Fortführung)

$$\{1,3,9\} \cap \{3,5,7\} = \{3\}$$

$$\mathcal{U} \cap \mathbb{N} = \mathcal{U}$$

$\diamond$

Die Differenz zweier Mengen A und B (in Zeichen $A \setminus B$) ist die Menge derjenigen Elemente von A, die nicht Elemente von B sind. D.h.,

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

Beispiel 1.6 (Fortführung)

$$\{1,3,9\} \setminus \{3,5,7\} = \{1,9\}$$

$\diamond$

Die symmetrische Differenz $A \oplus B$ zweier Mengen A und B ist definiert durch

$$A \oplus B := A \setminus B \cup B \setminus A.$$

Beispiel 1.6 (Fortführung)

$$\{1,3,9\} \oplus \{3,5,7\} = \{1,9,5,7\}$$

$\blacklozenge$

Einige Eigenschaften der Mengenoperationen können leicht aus deren Definitionen gefolgert werden. Seien A, B und C Mengen. Dann gelten folgende Regeln:

Idempotenz: $A \cup A = A$
$A \cap A = A$

Kommutativität: $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

Assoziativität: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Distributivität: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Absorbtion: $A \cap (A \cup B) = A$
$A \cup (A \cap B) = A$

DeMorgan'sche Regeln: $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \cap A \setminus C$
$A \setminus (B \cap C) = A \setminus B \cup A \setminus C$

Wir beweisen die erste der DeMorgan'schen Regeln. Seien

$$L := A \setminus (B \cup C) \text{ und } R := A \setminus B \cap A \setminus C.$$

Zu zeigen ist $L = R$. Hierzu beweisen wir zunächst $L \subseteq R$ und dann $R \subseteq L$.

$L \subseteq R$:

Betrachte $x \in L$ beliebig. Dann gilt

$$x \in A \text{ aber } x \notin B \text{ und } x \notin C.$$

Also gilt $x \in A \setminus B$ und auch $x \in A \setminus C$.

Also ist x auch ein Element von R. Da x ein beliebiges Element von L ist, folgt somit $L \subseteq R$.

$R \subseteq L$:

Betrachte $x \in R$ beliebig. Dann gilt

$$x \in A \setminus B \quad \text{und} \quad x \in A \setminus C.$$

Somit gilt

$$x \in A \quad \text{aber} \quad x \notin B \cup C.$$

Demzufolge ist $x \in L$. Da x ein beliebiges Element von R ist, folgt somit $R \subseteq L$.

■

Übung:

Beweisen Sie eines der beiden Distributivitätsgesetze.

Zwei Mengen A und B heißen disjunkt, wenn sie kein gemeinsames Element besitzen. D.h., $A \cap B = \emptyset$.

Man kann auch den Durchschnitt oder die Vereinigung von mehr als zwei Mengen bilden. Sei S eine Kollektion von Mengen. Dann schreiben wir

$$\bigcup S := \{ x \mid x \in P \text{ für eine Menge } P \in S \}$$

und

$$\bigcap S := \{ x \mid x \in P \text{ für alle Mengen } P \in S \}.$$

Zum Beispiel gilt für

$$S = \{ \{a,b\}, \{b,c\}, \{b,d\} \}$$

$$\bigcup S = \{a,b,c,d\} \text{ und } \bigcap S = \{b\}.$$

Die Kollektion aller Teilmengen einer Menge A ist selbst eine Menge. Wir nennen diese Menge Potenzmenge von A und bezeichnen diese mit 2^A.

Beispiel 1.7

Sei $A = \{a,b,c\}$. Dann gilt

$$2^A := \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}.$$

◊

Eine Partition Π einer nichtleeren Menge A ist eine Teilmenge von 2^A, so dass

i) $\emptyset \notin \Pi$
ii) Für jedes $x \in A$ existiert genau eine Menge $B \in \Pi$ mit $x \in B$.

Dies bedeutet insbesondere, dass die Elemente von Π paarweise disjunkt sind und dass $\bigcup \Pi = A$.

1.3 Relationen und Funktionen

In der Mathematik interesiert man sich nicht nur für Aussagen über Objekte sondern auch für Beziehungen zwischen Objekten. Wir nennen solche Beziehung auch Relation.

Beispiel 1.8

a) "kleiner als" ist eine Relation zwischen Zahlen. Diese gilt zwischen 3 und 8; nicht jedoch zwischen 8 und 3 oder zwischen 3 und 3.

b) "verheiratet" ist eine Relation zwischen Menschen.

◊

Obige Beschreibung der Relationen "kleiner als" und "verheiratet" ist noch informell.

Frage:
Wie definieren wir formal eine Relation?

Man könnte zwei Objekte, die zueinander in Relation stehen, zu einem Paar gruppieren. Da z.B. 3 kleiner ist als 8 aber 8 nicht kleiner ist als 3, müssen wir zwischen den beiden Teilen eines Paares unterscheiden können. Dies führt zur Definition von so genannten geordneten Paaren.

(a,b) bezeichnet das geordnete Paar der Objekte a und b. Dabei heißen a und b Komponenten des geordneten Paares (a,b).

Beachte

Das geordnete Paar (a,b) ist aufgrund seiner Ordnung verschieden zur Menge $\{a,b\}$.
Es gilt

$$(a,b) \neq (b,a) \quad \text{aber} \quad \{a,b\} = \{b,a\}.$$

Des Weiteren fordern wir nicht, dass die beiden Komponenten eines geordneten Paares verschieden sein müssen. So ist z.B. $(3,3)$ ein gültiges geordnetes Paar. Zwei geordnete Paare (a,b) und (c,d) sind nur dann gleich wenn $a=c$ und $b=d$.

Das kartesische Produkt $A \times B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a,b) mit $a \in A$ und $b \in B$. D.h.,

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Eine binäre Relation auf zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$.

Beispiel 1.8 (Fortführung)

a) Die Teilmenge

$$\{(i,j) \mid i,j \in \mathbb{N} \text{ und } i < j\}$$

von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert die "kleiner als" Relation auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$.

b) Wenn Jutta mit Peter und Gabi mit Klaus und sonst keine der Frauen aus

$$M_1 := \{\text{Ulrike, Jutta, Petra, Gabi}\}$$

mit einem der Männer aus

$$M_2 := \{\text{Peter, Klaus, Wolfgang}\}$$

verheiratet ist, dann definiert

$$\{(\text{Gabi, Klaus}), (\text{Jutta, Peter})\}$$

die Relation "verheiratet" auf M_1 und M_2.

■

Man kann auch mehr als zwei Objekte zueinander in Beziehung setzen. Z.B. könnte man aus einer Menge von Arbeitern Teams der Größe fünf bilden.

$\leadsto$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ n Objekte, die nicht notwendigerweise verschieden sein müssen. Dann ist $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ein <u>geordnetes n-Tupel</u>

a_i, $1 \leq i \leq n$ ist die <u>i-te Komponente</u> von $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Sei $(b_1, b_2, \dots, b_m)$, $m \in \mathbb{N}$ ein geordnetes m-Tupel. Dann gilt

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ genau dann, wenn $m = n$ und $a_i = b_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ beliebige Mengen. Dann ist das <u>n-fache kartesische Produkt</u> $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ die Menge aller geordneten n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ für $1 \leq i \leq n$. D.h.,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}.$$

Falls $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, dann schreiben wir für $A \times A \times \ldots \times A$ auch kürzer A^n.

Eine <u>n-stellige Relation</u> auf den Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ist eine Teilmenge von $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

Eine binäre Relation $f \subseteq A \times B$ mit

für jedes $a \in A$ existiert genau ein $b \in B$, so dass $(a, b) \in f$

heißt <u>Funktion</u> oder <u>Abbildung</u> von A nach B. A ist der <u>Definitionsbereich</u> und B der <u>Bild-</u> oder <u>Wertebereich</u> der Funktion f. Eine Funktion ordnet somit jedem Element a des Definitionsbereiches auf eindeutige Weise ein Element f(a) des Bildbereiches zu. Wir schreiben

$$f: A \to B$$

um eine Funktion f von A nach B zu bezeichnen.

Für $A' \subseteq A$ heißt

$$f(A') := \{ f(a) \mid a \in A' \}$$

das <u>Bild</u> von A unter f. Für $B' \subseteq B$ heißt

$$f^{-1}(B') := \{ a \in A \mid f(a) \in B' \}$$

das <u>Urbild</u> von B' unter f. Für $b \in B$ schreibt man $f^{-1}(b)$ anstatt $f^{-1}(\{b\})$. D.h.,

$$f^{-1}(b) := \{ a \in A \mid f(a) \quad b \}.$$

Eine Funktion $f: A \to B$ heißt

- <u>injektiv</u>, falls für $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$ stets $f(a) \neq f(a')$,
- <u>surjektiv</u>, falls für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ existiert und
- <u>bijektiv</u>, falls f injektiv und surjektiv ist.

Eine Abbildung $f: A \to B$ heißt <u>Bijektion zwischen A und B</u>, falls f bijektiv ist.

<u>Beispiel 1.9</u>

Die Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^2$ ist injektiv. Wegen $-1 \neq 1$ aber $(-1)^2 = 1^2$ ist die Funktion $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $g(x) = x^2$ nicht injektiv. Beide Funktionen sind nicht surjektiv, da $\sqrt{2}$ kein Element von $\mathbb{Z}$ ist.

Für jede binäre Relation $R \subseteq A \times B$ ist die <u>inverse Relation</u> $R^{-1} \subseteq B \times A$ definiert durch

$$(b,a) \in R^{-1} \text{ genau dann, wenn } (a,b) \in R.$$

Zur Definition einer <u>inversen Funktion</u> (oder auch <u>Umkehrfunktion</u>) einer Funktion $f: A \to B$ benötigen wir, dass f injektiv ist, da ansonsten die inverse Relation f^{-1} keine Funktion mehr ist.

Die <u>Hintereinanderausführung</u> (oder auch <u>Komposition</u>) $R \circ Q$ zweier binären Relationen Q und R ist definiert durch

$$R \circ Q := \{ (a,b) \mid \text{es existiert ein } c \text{ mit } (a,c) \in Q \text{ und } (c,b) \in R \}.$$

Die <u>Hintereinanderausführung</u> $(g \circ f)$ zweier Funktionen $f: A \to B$ und $g: B \to C$ ist eine Funktion $h: A \to C$, wobei

$$h(a) = g(f(a)) \text{ für alle } a \in A.$$

<u>1.4 Spezielle Typen von binären Relationen</u>

<u>Ziel:</u>

Beschreibung von Eigenschaften "gut strukturierter" binären Relationen.

Wir betrachten nur binäre Relationen auf eine Menge und sich selbst. D.h., eine Relation $R \subseteq A \times A$ für eine Menge A.

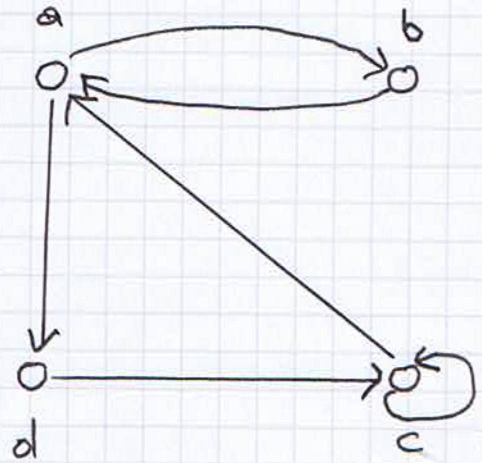
Falls A endlich ist, dann kann R auf folgende Art und Weise durch einen <u>gerichteten Graphen</u> repräsentiert werden. Jedes Element von A wird durch einen kleinen Kreis, einen sogenannten <u>Knoten</u>, repräsentiert. Wir zeichnen genau dann einen Pfeil, eine sogenannte <u>gerichtete Kante</u> von a nach b, wenn $(a,b) \in R$.

<u>Beispiel 1.10</u>

Betrachte

$$R = \{(a,b), (b,a), (a,d), (d,c), (c,c), (c,a)\}.$$

Folgender gerichtete Graph repräsentiert R:



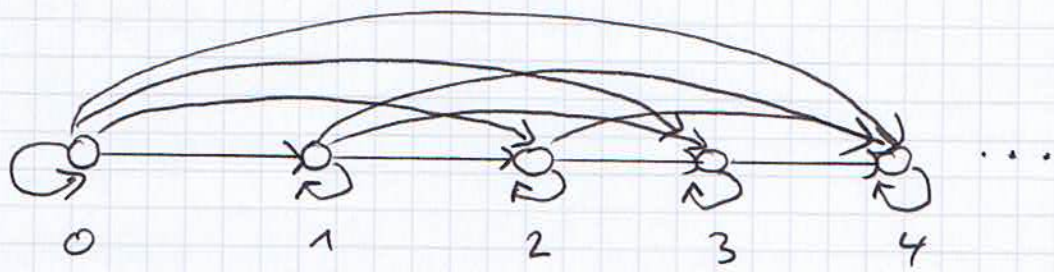
$\Diamond$

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt <u>reflexiv</u>, falls $(a,a) \in R$ für alle $a \in A$.

Bemerkung:
Der gerichtete Graph, der eine reflexive Relation repräsentiert besitzt für jeden Knoten eine Selbstschleife.

Beispiel 1.11

Betrachte die "kleiner gleich"-Relation $\{ (i,j) \mid i,j \in \mathbb{N}_0, i \leq j \}$. Wir erhalten folgenden Graphen



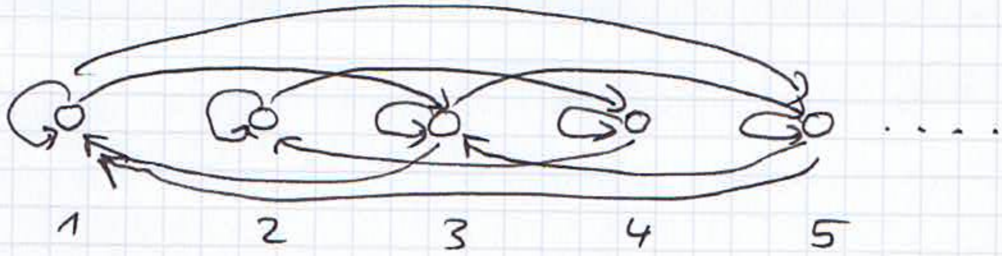
Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt <u>symmetrisch</u>, falls $(b,a) \in R$ wenn $(a,b) \in R$.

Bemerkung:
Der gerichtete Graph, der eine symmetrische Relation repräsentiert enthält zwischen zwei Knoten Pfeile in beide Richtungen oder keinen Pfeil.

Beispiel 1.12

Betrachte
$\{ (i,j) \mid i,j \in \mathbb{N}$ i und j gerade oder i und j ungerade$\}$

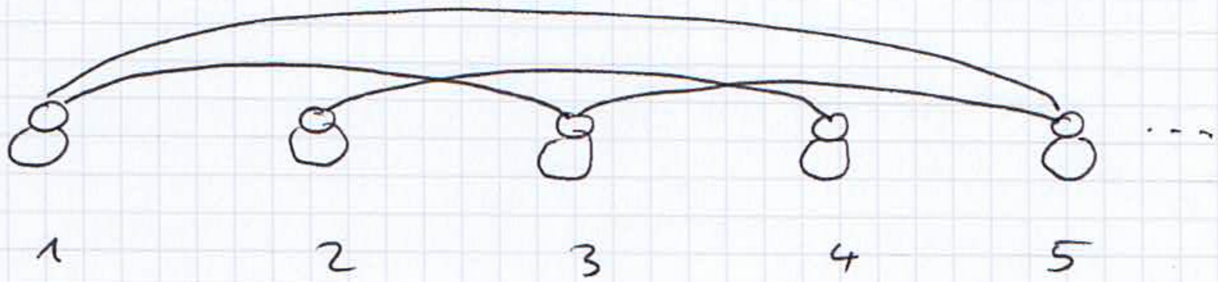
Wir erhalten folgenden Graphen:



Symmetrische Relationen können durch __ungerichtete Graphen__ repräsentiert werden.

__Beispiel 1.12__ (Fortführung)

Wir erhalten folgenden ungerichteten Graphen:



Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt __antisymmetrisch__ falls $(a,b) \in R$ und $a \neq b$, dann $(b,a) \notin R$.

__Beispiel 1.13__

Sei A die Menge aller Personen. Dann ist

$$\{(a,b) \mid a,b \in A \text{ und } a \text{ ist Vater von } b\}$$

antisymmetrisch.

Die Relation

$$\{(a,b) \mid a,b \in A \text{ und } a \text{ ist Bruder von } b\}$$

ist weder symmetrisch noch antisymmetrisch.

◇

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt <u>transitiv</u> falls $(a,b) \in R$ und $(b,c) \in R$ dann $(a,c) \in R$.

<u>Beispiel 1.13</u> (Fortführung)

Die Relation

$$\{(a,b) \mid a,b \in A \text{ und } a \text{ ist ein Vorfahr von } b\}$$

ist transitiv.

◆

<u>Bemerkung</u>:

Im Graphen, der eine transitive Relation repräsentiert, ist die Transitivität äquivalent zur Eigenschaft:

Wenn eine Folge von Pfeilen von einem Knoten a zu einem Knoten z existiert, dann existiert auch ein Pfeil von a nach z.

Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt <u>Äquivalenzrelation</u>.

Bemerkung:

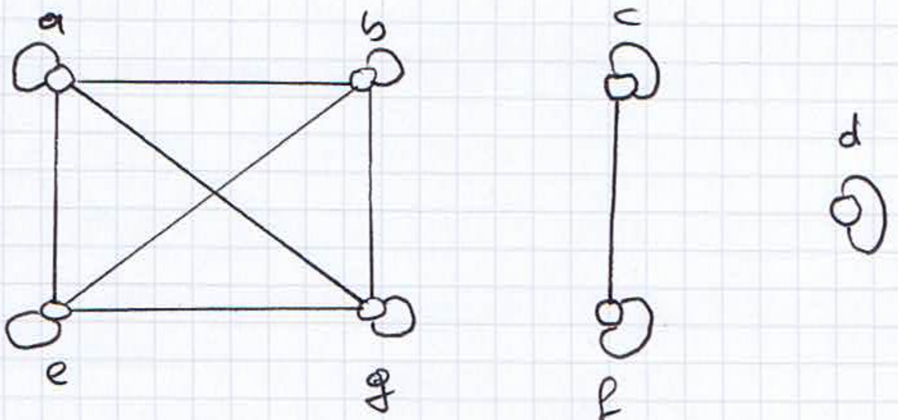
Die Repräsentation einer Äquivalenzrelation durch einen ungerichteten Graphen besteht aus einer Anzahl von Komponenten, für die gilt:

i) In jeder Komponente ist jedes Paar von Knoten durch Kante miteinander verbunden.

ii) Zwei Knoten in verschiedenen Komponenten sind nicht miteinander verbunden.

Beispiel 1.14

Folgender Graph repräsentiert eine Äquivalenzrelation:



Die Komponenten einer Äquivalenzrelation heißen <u>Äquivalenzklassen</u>. Wir schreiben $[a]_R$ für diejenige Äquivalenzklasse bzgl der Äquivalenzrelation R, die a enthält. Falls R fest ist, dann schreiben wir kürzer $[a]$. D.h.,

$$[a] = \{ b \mid (a,b) \in R \}.$$