Klausur

BA-INF 011 – Logik und Diskrete Strukturen

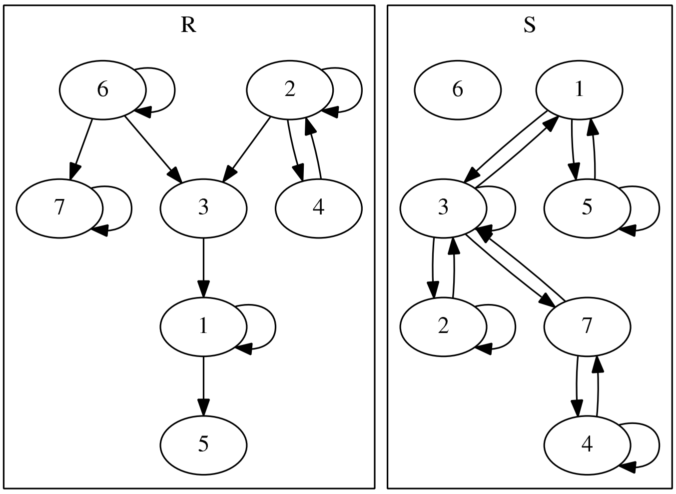
Wintersemester 2010/2011

08. Februar 2011

Gesamt: 100 Punkte – *Bestanden:* 40 Punkte

1 Mengen und Relationen (10 Punkte)

Gegeben Sei die Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Die Relationen R und S auf A werden durch folgende Graphen repräsentiert:



Sei die Relation T definiert durch $T := R \cup S$.

1. (5 Punkte) Ist T reflexiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. (5 Punkte) Geben Sie den reflexiven, transitiven Abschluss von T an.

2 Aussagen- und Prädikatenlogik (35 Punkte)

1. (5 Punkte) Sei
$$\alpha = (x_1 \wedge x_2) \vee \neg x_3 \vee (x_4 \wedge \neg x_5 \wedge (\neg x_1 \vee x_6)).$$
Geben Sie einen zu α äquivalenten Ausdruck in KNF sowie in DNF an.
2. (20 Punkte) Zeigen Sie, dass jeder aussagenlogische Ausdruck ϕ sowohl zu einem Ausdruck in KNF als auch zu einem Ausdruck in DNF umgeformt werden kann.
3. (10 Punkte) Zeigen Sie, dass falls $\Delta \cup \{\neg\phi\}$ inkosistent ist, dann gilt auch $\Delta \vdash \phi$.

Bitte zweite Seite beachten!

3 Beweistechniken (15 Punkte)

1. (5 Punkte) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

gilt.

2. (10 Punkte) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für jedes $x \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n} ix^{i-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

gilt.

4 Theoretische Berechenbarkeit (40 Punkte)

1. (10 Punkte) Zeigen Sie, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind. Sie dürfen davon ausgehen, dass schon gezeigt wurde, dass die Addition, modifizierte Differenz und Multiplikation primitiv rekursiv sind.
   (a) (2 Punkte) $f_1(x, y) := x \leq y$
   (b) (3 Punkte) $f_2(x, y) := x^y$
   (c) (5 Punkte) $f_3(x) := \max\{i \mid i^i \leq x\}$
2. (20 Punkte) Zeigen Sie, dass es eine intuitiv berechenbare Funktion gibt, die nicht primitiv rekursiv ist.
3. (10 Punkte) Konstruieren Sie eine Turingmaschine mit Bandalphabet $\Sigma = \{0, 1, \#, \$, \text{␣}\}$, die die Anwendung des μ-Operators realisiert. Sie dürfen Pseudocode verwenden, um die Funktionsweise der Turingmaschine zu beschreiben.