Beweis:

Wir beweisen den Satz mittels Induktion über den Aufbau des Ausdruckes.

ϕ atomarer Ausdruck:

Dann enthält ϕ keinen Quantor und ist somit bereits in Pränexnormalform.

Annahme:

Zu ψ, ψ_1 und ψ_2 existieren äquivalente Ausdrücke in Pränexnormalform.

$\phi = \neg\psi$:

Sei $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n \varphi$ ein zu ψ äquivalenter Ausdruck in Pränexnormalform, wobei φ keinen Quantor enthält. Mittels wiederholter Anwendung des Lemmas 2.13 v) erhalten wir (wobei $\overline{\forall} := \exists$ und $\overline{\exists} := \forall$):

$$\begin{aligned}
\phi = \neg\psi &\equiv \neg Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n \varphi \\
&\equiv \overline{Q}_1x_1 \neg Q_2x_2 \dots Q_nx_n \varphi \\
&\;\;\vdots \\
&\equiv \overline{Q}_1x_1 \overline{Q}_2x_2 \dots \overline{Q}_nx_n \neg\varphi .
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist in Pränexnormalform.

$\Phi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, wobei $\circ \in \{\wedge, \vee\}$:

Betrachte zu φ_1 und zu φ_2 äquivalente Ausdrücke in Pränexnormalform. Mittels wiederholter Anwendung des Lemmas 2.13 iv) erreichen wir, dass keine freie Variable in einem der beiden Ausdrücken gebunden vorkommt und dass die gebundenen Variablen in beiden Ausdrücken paarweise disjunkt sind. Seien

$$Q_1' y_1 Q_2' y_2 \cdots Q_k' y_k \, \varphi_1 \quad \text{und}$$
$$Q_1'' z_1 Q_2'' z_2 \cdots Q_e'' z_e \, \varphi_2$$

die resultierenden Ausdrücke in Pränexnormalform. Betrachte

$$\Phi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \equiv Q_1' y_1 \cdots Q_k' y_k \, \varphi_1 \circ Q_1'' z_1 \cdots Q_e'' z_e \, \varphi_2$$

Wiederholte Anwendung Anwendung von

$$\begin{cases} \text{Lemma 2.13 ii)} & \text{falls } \circ = \wedge \\ \text{Lemma 2.13 iii)} & \text{falls } \circ = \vee \end{cases}$$

ergibt dann

$$\Phi \equiv Q_1' y_1 Q_2' y_2 \cdots Q_k' y_k Q_1'' z_1 Q_2'' z_2 \cdots Q_e'' z_e (\varphi_1 \circ \varphi_2).$$

Die rechte Seite ist in Pränexnormalform.

$\underline{\Phi = \forall x \psi}$:

Sei $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$ ein zu ψ äquivalenter Ausdruck in Pränexnormalform. Dann gilt:

$$\Phi = \forall x \psi \equiv \forall x Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi .$$

Die rechte Seite ist in Pränexnormalform.

$\blacksquare$