eine optimale Lösung des dualen Problems ist.

Wie man aus einer optimalen dualen Lösung eine optimale primale Lösung erhält, haben wir uns bereits überlegt.

Übung:
Arbeiten Sie den Algorithmus zur Berechnung eines optimalen zulässigen Flusses aus.

4. Fisher - Marktgleichgewichte

Ziel:
Anwendung von Netzwerkflüssen zur Lösung eines Problems aus den Wirtschaftswissenschaften.

Literatur:

N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirani (eds.) Algorithmic Game Theory, Cambridge University Press (2007), Ch. 5.

X. Deng, Ch. Papadimitriou, S. Safra, On the complexity of equilibria, 34th STOC (2002), 67-71. (Ausgearbeitete Arbeit kann von X. Deng's Homepage bezogen werden).

N.R. Devanur, Ch. Papadimitriou, A. Saberi, V. Vazirani, Market equilibrium via a primal-dual algorithm for a convex program, JACM (2008), 1-18.

J.B. Orlin, Improved algorithms for computing Fishers Market clearing prices, 42th STOC (2010), 291 - 300.

Ein <u>Fisher-Markt</u> besteht aus

- einer Menge B von n Käufern und
- einer Menge A von m teilbaren Gütern.

Jeder Käufer a_i, $1 \le i \le n$ hat ein Kapital von e_i EURO und eine konkave <u>Nutzenfunktion</u> $u_i : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+$.

$\overline{x}_i \in \mathbb{R}^m$ bezeichnet den zum i-ten Käufer korrespondierenden <u>Einkaufsvektor</u>. Die j-te Komponente x_{ij} von $\overline{x}_i$ gibt genau die Quantität des Gutes j, $1 \le j \le m$, an, die a_i kauft.

$u_i(\overline{x}_i)$ ist der Nutzen des Käufers a_i bei den gekauften Gütern $\overline{x}_i$.

Sei $\overline{p} := (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^m$ der Preisvektor bzgl. den m Gütern. D.h., p_j EURO ist der Preis für eine Einheit des Gutes j, $1 \le j \le m$.

Das Ziel eines jeden Käufers a_i, $1 \le i \le n$, ist bezüglich des Preisvektors $\overline{p}$ optimales Bündel $\overline{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im})$ von Gütern unter Verwendung seines Kapitals e_i zu kaufen. D.h., Käufer a_i löst das folgende Optimierungsproblem:

$$\max u_i(\overline{x}_i)$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_j x_{ij} \le e_i .$$

<u>Ziel</u>:

Finde einen Preisvektor $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, so dass jeder Käufer sein ganzes Kapital ausgibt, ein bzgl. $\bar{p}$ optimales Bündel kauft und alle Güter restlos verkauft werden.

Ein derartiger Preisvektor heißt <u>Marktgleichgewicht</u>. Obiges Marktgleichgewichtsmodell wurde 1891 von Irving Fisher eingeführt.

Wir betrachten den Spezialfall von linearen Nutzenfunktionen. Eine Funktion u_i heißt <u>linear</u>, falls

$$u_i(\bar{x}_i) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij} x_{ij} ,$$

wobei $u_{ij} \in \mathbb{R}_+$.

<u>Ziel</u>:

Entwicklung eines Algorithmus, der unter Verwendung von Netzwerkflüssen ein Marktgleichgewicht berechnet.

<u>Bemerkung</u>:

Falls wir bzgl. den Gütern Mengenangaben haben, dann können wir mittels geeigneter Skalierung der Nutzenfunktionen u_{ij} dafür sorgen, dass für jedes Gut exakt eine Einheit vorliegt.

Übung:
Sei für Gut j, $1 \le j \le m$, die Menge b_j gegeben. Wie sieht die Skalierung aus, die all diese Mengenangaben zu eins macht, ein Marktgleichgewicht des resultierenden Marktes ein Marktgleichgewicht des ursprünglichen Marktes ist und umgekehrt?

Sei $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ ein Preisvektor.

Beobachtung:
Falls Käufer a_i das Gut j zum Preis p_j kauft, dann beträgt sein Nutzen pro EURO

$$\frac{u_{ij}}{p_j}.$$

Dieser Quotient heißt relativer Nutzen des Gutes j für den Käufer a_i.

Um ein optimales Bündel von Gütern zu kaufen, möchte jeder Käufer a_i, $1 \le i \le n$ nur Güter mit maximalen relativen Nutzen zu kaufen.

$\rightsquigarrow$)

Wir definieren für $1 \le i \le n$

$$\alpha_i := \max \left\{ \frac{u_{ij}}{p_j} \;\middle|\; 1 \le j \le m \right\}.$$

Jeder Käufer $a_i \in B$ kauft nur Güter j mit $\frac{u_{ij}}{p_j} = \alpha_i$.
Zur Identifikation dieser Güter definieren wir den sogenannten Identifikationsgraphen $G(\bar{p}) := (A, B, E)$ wobei

$$E := \left\{ (a_i, j) \;\middle|\; \frac{u_{ij}}{p_j} = \alpha_i \right\}.$$

Annahme:

Der zu einem gegebenen Preisvektor $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ zugehörige Identifikationsgraph $G(\bar{p}) = (A, B, E)$ ist berechnet.

Ziel:

Berechnung des größten Geldbetrages $\leq e_i$, die der Käufer a_i, $1 \leq i \leq n$ zum Kauf von Gütern mit maximalen relativen Nutzen ausgeben kann, ohne dabei die vorhandene Menge eines Gutes zu überschreiten.

Idee:

Konstruktion eines Flussnetzwerkes

$$\mathcal{G}(\bar{p}) := (A \cup \{s\}, B \cup \{t\}, E', c),$$

wobei

$$E' := \{ (a_i, j) \mid (a_i, j) \in E, a_i \in B, j \in A \}$$
$$\cup \{ (s, a_i) \mid a_i \in B \} \cup \{ (j, t) \mid j \in A \}$$

und $c : E' \to \mathbb{R}$ mit

$$c_{xy} := c(x,y) := \begin{cases} \infty & \text{falls } x \in B, y \in A \\ e_i & \text{falls } x = s, y = a_i \\ p_x & \text{falls } x \in A, y = t. \end{cases}$$

Interpretation:

Ein Fluss von der Quelle s zur Senke t entspricht dem Transfer von Geld. Eine Einheit Fluss über eine Kante (a_i, j) repräsentiert einen EURO, die der Käufer a_i für das Gut j ausgibt.

$\Rightarrow$

$\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ ist genau dann ein Marktgleichgewicht, wenn der maximale Flusswert in $\mathcal{G}(\bar{p})$ gleich $K := \sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{j=1}^{m} p_j$ ist.

Idee:

1. Starte mit $\bar{p} := \left(\frac{K}{m}, \frac{K}{m}, \ldots, \frac{K}{m}\right)$.
2. Verteile Preise um, bis schließlich K der maximale Flusswert ist.

Beobachtung:

- Nach der Initialisierung ist jeder Käufer mit exakt denjenigen Gütern verbunden, die für ihn maximalen Nutzen haben. Demzufolge ist jeder Käufer mit mindestens einem Gut verbunden.

- Güter, die für keinen Käufer maximalen Nutzen haben, sind mit keinem Käufer verbunden.

Beispiel:

$n = 4, \quad m = 5$

$e = (100, 60, 20, 140) \Rightarrow K = 320$ €

Folgende Matrix definiert die Nutzenfunktionen der einzelnen Spieler:

i \ j	1	2	3	4	5
1	10	20	4	2	8
2	10	20	8	1	8
3	15	15	15	2	10
4	20	10	5	1	5

Wir starten mit dem Preisvektor

$$\bar{p} = (64, 64, 64, 64, 64).$$

Bezeichne z_{ij} den Nutzen pro EURO des Gutes j für den Käufer a_i. D.h.,

$$z_{ij} = \frac{u_{ij}}{p_j}.$$

Folgende Matrix gibt bzgl. $\bar{p}$ die Werte z_{ij}, $1 \le i \le 4$, $1 \le j \le 5$ an:

i \ j	1	2	3	4	5
1	$\frac{10}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{8}{64}$
2	$\frac{10}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{8}{64}$
3	$\frac{15}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{10}{64}$
4	$\frac{20}{64}$	$\frac{10}{64}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{5}{64}$

$\Rightarrow$

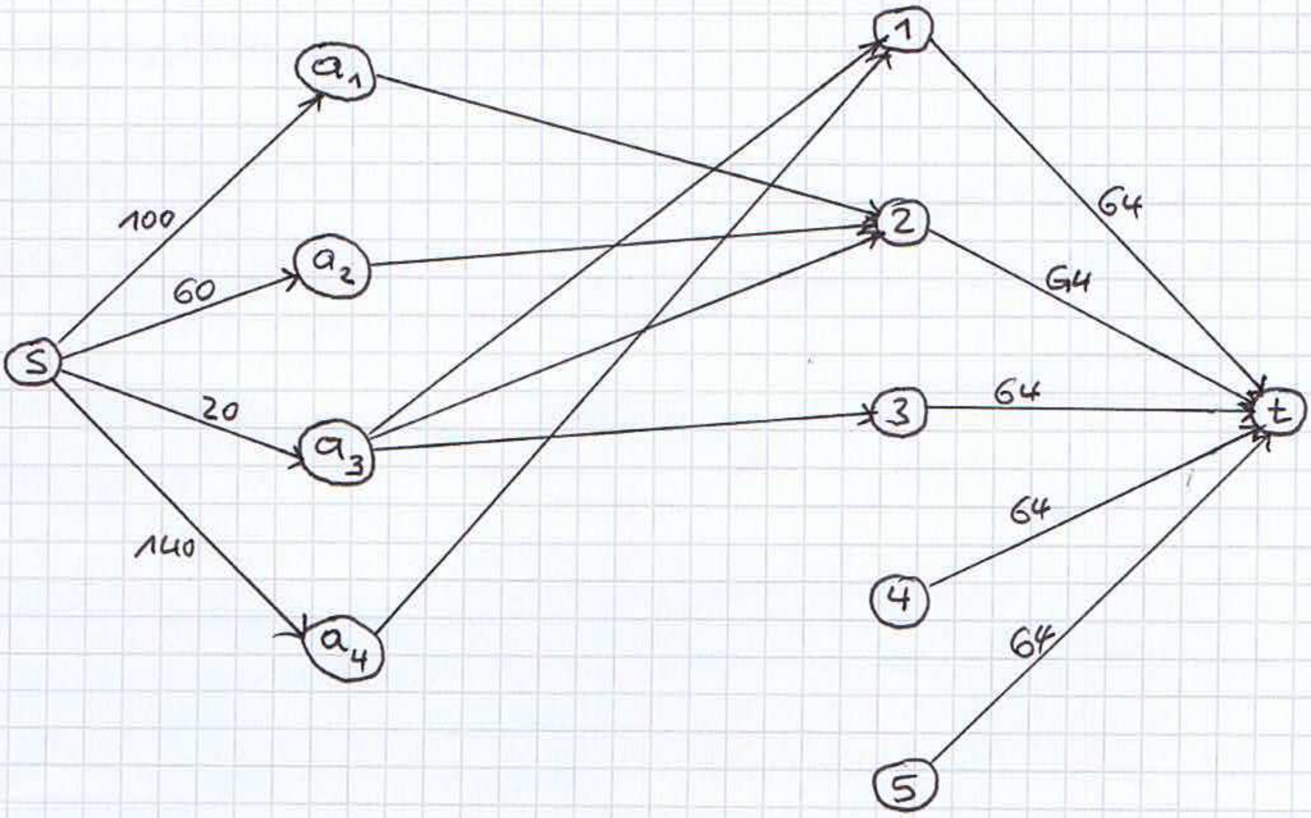
$$\alpha_1 = \frac{20}{64}$$

$$\alpha_2 = \frac{20}{64}$$

$$\alpha_3 = \frac{15}{64}$$

$$\alpha_4 = \frac{20}{64}$$

Somit ergibt sich folgendes Flussnetzwerk:



Die Berechnung eines maximalen Flusses im obigen Flussnetzwerk ergibt den Flusswert

$$f_{max} = 148$$

und folgenden Fluss f:

- $f(a_1, 2)$, $f(a_2, 2) \geq 0$ beliebig, so dass

  $$f(a_1, 2) + f(a_2, 2) = 64$$

- $f(a_3, 1) = f(a_3, 2) = 0$
  $f(a_3, 3) = 20$

- $f(a_4, 1) = 64$

Wegen $f_{max} < 320$ muss ein Verbesserungsschritt durchgeführt werden.

Situation:

a) Die Güter 1 und 2 sind ausverkauft. Die Güter 3, 4 und 5 sind nicht ausverkauft.

b) Der Käufer a_3 hat sein gesamtes Kapital ausgegeben. Die Käufer a_1, a_2 und a_4 haben noch Kapital zur Verfügung (, wobei wir vom Fluss $f(a_1, 2) = f(a_2, 2) = 32$ ausgehen).

Idee:

Sorge zunächst dafür, dass alle Güter ausverkauft werden und dann dafür, dass unter Beibehaltung dieser Eigenschaft alle Käufer ihr Kapital restlos ausgeben. Ersteres erreichen wir mittels Reduktion des Preises von nicht ausverkauften Gütern. Die zweite Eigenschaft erreichen wir durch Erhöhung der Preise von Gütern, die mit Käufern, die noch Restkapital besitzen, verbunden sind.

$\rightsquigarrow$

Preisreduktionsphase:

while $\exists$ nicht ausverkauftes Gut
  do
    Wähle solches Gut j (d.h., $f(j,t) < p_j$)
    while Gut j ist nicht ausverkauft
      do
        Reduziere den Preis des Gutes j

Preiserhöhungsphase:

<u>while</u> ∃ Käufer mit Restkapital
  <u>do</u>
    Wähle solchen Käufer a_i ;
    <u>while</u> a_i besitzt Restkapital
      <u>do</u>
        Erhöhe die Preise der mit a_i verbundene Güter.
      <u>od</u>
  <u>od</u>.

Wir werden zunächst die Preisreduktionsphase ausarbeiten.

4.1 Die Preisreduktionsphase

<u>Beispiel</u> (Fortführung)

<u>Annahme</u>: Gut 3 wird ausgewählt.

<u>Beobachtung</u>:

i) Sobald p_3 reduziert wird wächst α_3
$\Rightarrow$
$(a_3, 1)$ und $(a_3, 2)$ verlassen das Flussnetzwerk.

- Auf beiden Kanten ist kein Fluss
  $\Rightarrow$
  Der bisherige Fluss f kann auf dem verbleibenden Netzwerk reali=

siert werden.

- Falls eine Kante mit positiven Fluss das Netzwerk verlassen würde, wäre der aktuelle Fluss nicht mehr realisierbar.

◊

Damit der aktuelle Fluss f auch nach der Preisreduktion realisierbar bleibt, fordern wir, dass alle Kanten in $\mathcal{G}(\bar{p})$ mit positiven Fluss im resultierenden Netzwerk $\mathcal{G}(\bar{q})$ bleiben. Dabei ist $\bar{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ der Preisvektor nach der Preisreduktion.

Frage:
Wie sorgen wir dafür, dass Kanten mit positiven Fluss im Netzwerk bleiben?

Beobachtung:

- Falls das Gut j, deren Preis reduziert wird, mit einem Käufer a_{i_1} verbunden ist, ~~und~~ dieser mit einem anderen Gut j_2 verbunden ist und $f(a_{i_1}, j_2) > 0$, dann erzwingt die Preisreduktion des Gutes j eine akkurate Preisreduktion des Gutes j_2. Ansonsten würde die Kante (a_{i_1}, j_2) das Netzwerk verlassen.
- Falls das Gut j_2 mit einem Käufer a_{i_2} ver=

bunden ist, dieses mit einem anderen Gut j_3 verbunden ist und $f(a_{i_2}, j_3) > 0$, dann erzwingt die Preisreduktion des Gutes j_2 eine akkurate Preisreduktion des Gutes j_3 u.s.w. Insgesamt gilt:

- Die Preisreduktion des Gutes j erzwingt genau dann eine akkurate Preisreduktion des Gutes j', wenn ein Pfad

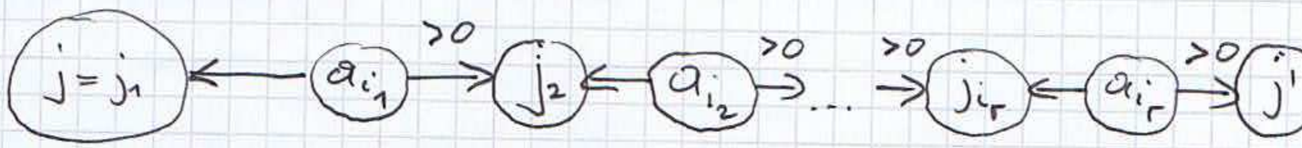
$$P = (j = j_1, a_{i_1}, j_2, a_{i_2}, j_3, \ldots, j_{i_r}, a_{i_r}, j_{r+1} = j')$$

mit

i) $(a_{i_h}, j_h), (a_{i_h}, j_{h+1}) \in E'$ und
ii) $f(a_{i_h}, j_{h+1}) > 0$, $1 \le h \le r$

existiert. Wir nennen solchen Pfad j'-<u>erzwingend</u>.

<u>Struktur von P:</u>



Auf P liegen die Kanten von einem Gut zu einem Käufer in Rückwärtsrichtung. Wir nennen solche Kante <u>Rückwärtskante bzgl. P</u>.
Seien

$R(j) := \{ j' \in A \mid$ Preisreduktion des Gutes j erzwingt Preisreduktion des Gutes $j' \}$

$K(j) := \{ a_i \in B \mid$ Käufer a_i ist mit Gut aus $R(j)$ verbunden $\}$

Bemerkung: Es gilt $j \in R(j)$.

Ziel: Berechnung von $R(j)$ und $K(j)$.

Beobachtung:
Zur Berechnung von $R(j)$ und $K(j)$ genügt es, kürzeste erzwingende Pfade zu betrachten

$\rightsquigarrow$

Idee:
Berechne gleichzeitig ein geschichtetes Teilnetzwerk $\mathcal{G}(\bar{p}, j) := (R(j) \cup K(j), E(j))$ von $\mathcal{G}(\bar{p})$, das genau die kürzesten erzwingenden Pfade der Güter in $R(j)$ enthält.

Durchführung:

Die Schichten in $\mathcal{G}(\bar{p}, j)$ enthalten abwechselnd Knoten in $R(j)$ und Knoten in $K(j)$. Bezeichne

- R_ℓ, $\ell \geq 1$ die ℓ-te Schicht mit Knoten in $R(j)$ und
- K_ℓ, $\ell \geq 1$ die ℓ-te Schicht mit Knoten in $K(j)$.

Seien

$$R_1 := \{j\},$$

$$K_1 := \{ a_{i'} \in B \mid (a_{i'}, j) \in E' \} \text{ und}$$

$$E_{b,1} := \{ (a_{i'}, j) \mid (a_{i'}, j) \in E' \}.$$

Für $\ell \geq 1$ definieren wir

$$R_{\ell+1} := \{ j' \in A \setminus \bigcup_{h=1}^{\ell} R_h \mid \exists\, a_{i'} \in K_\ell : (a_{i'}, j') \in E' \text{ und } f(a_{i'}, j') > 0 \},$$

$$E_{f,\ell+1} := \{ (a_{i'}, j') \in E' \mid a_{i'} \in K_\ell,\ j' \in R_{\ell+1} \text{ und } f(a_{i'}, j') > 0 \},$$

$$K_{\ell+1} := \{ a_{i'} \in B \setminus \bigcup_{h=1}^{\ell} K_h \mid \exists\, j' \in R_{\ell+1} : (a_{i'}, j') \in E' \}$$

und

$$E_{b,\ell+1} := \{ (a_{i'}, j') \in E' \mid a_{i'} \in K_{\ell+1} \text{ und } j' \in R_{\ell+1} \}.$$

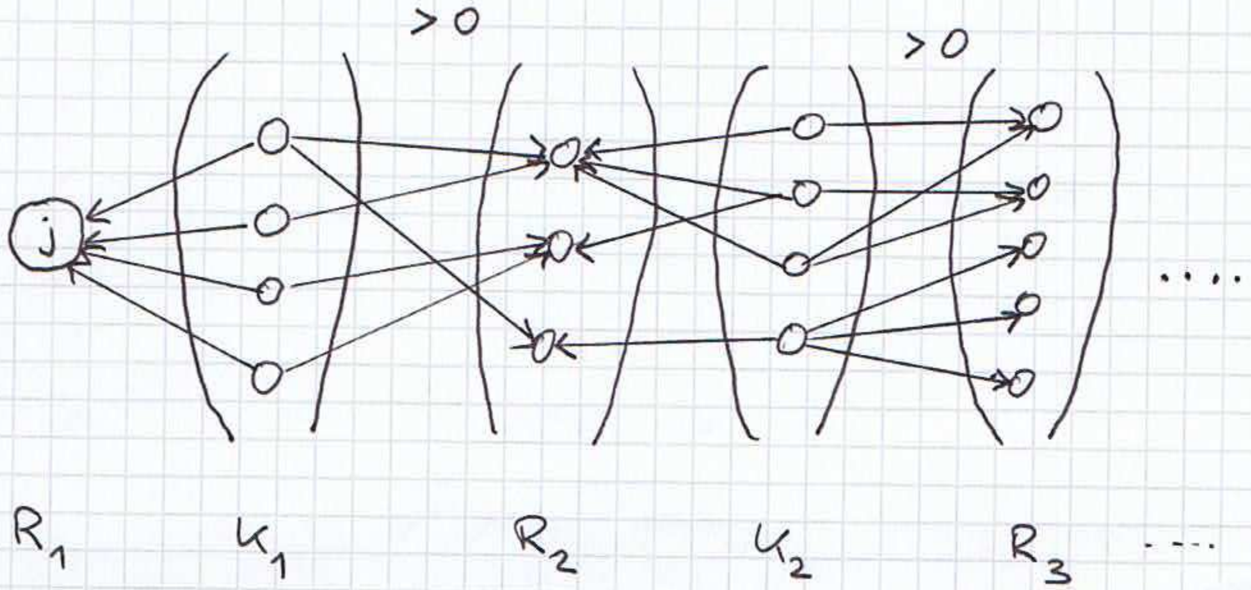
Konstruktion $\Longrightarrow$

$$R(j) = \bigcup_\ell R_\ell, \quad K(j) = \bigcup_\ell K_\ell$$

und

$$E(j) = \bigcup_\ell (E_{f,\ell} \cup E_{b,\ell})$$

Folgendes Bild beschreibt die Struktur von $\mathcal{G}(\bar{p}, j)$:



Beobachtung:

Das geschichtete Teilnetzwerk $\mathcal{G}(\bar{p}, j)$ hat für $\ell \geq 1$ folgende Eigenschaften:

i) Alle Kanten von K_ℓ nach $R_{\ell+1}$ haben positiven Fluss.

ii) Der Fluss auf Kanten von K_ℓ nach R_ℓ kann null sein.

iii) Alle ausgehenden Kanten von K_ℓ mit positiven Fluss sind Kanten von K_ℓ nach $R_\ell \cup R_{\ell+1}$ und sind in $E(j)$.

Alle Käufer in $K(j)$ haben ihr Kapital restlos ausgegeben. Andernfalls könnte der Fluss erhöht werden

Übung:

Beweisen Sie, dass alle Käufer in $K(j)$ ihr Kapital restlos ausgegeben haben.

Ziel:

Berechnung des Gesamtbetrages M, der für die Preisreduktion von Gütern in R(j) verwandt wird. Dabei soll die Eigenschaft, dass alle Käufer in K(j) ihr Kapital restlos ausgegeben haben, aufrecht gehalten werden.

Wenn ein Gut seinen Preis reduziert, dann bezahlen die Käufer des Gutes weniger. Dies bedeutet, dass diese das gesparte Geld ausgeben müssen. Hierzu gibt es u.a. folgende Möglichkeiten:

1) Falls das Gut nicht ausverkauft ist, dann können die Käufer des Gutes mehr von dem Gut kaufen.

2) Einige Käufer kaufen mehr von dem Gut, andere dafür weniger. Die anderen kaufen stattdessen andere Güter.

Idee:

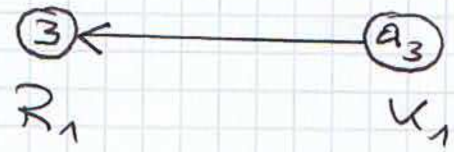
Wähle M dergestalt, dass die gesamte Preisreduktion, die nicht durch andere nicht ausverkaufte Güter absorbiert wird, durch das Gut j absorbiert werden kann.

Beispiel (Fortführung)

Annahme:

Das Gut 3 wird für die Preisreduktionsphase gewählt.

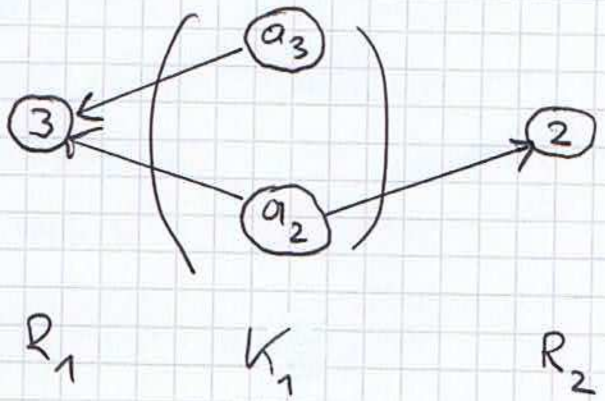
$\mathcal{G}(\bar{p},3)$ sieht folgendermaßen aus:



Bedingt durch die Preisreduktion des Gutes 3 verlassen die Kanten $(a_3,1)$ und $(a_3,2)$ das Flussnetzwerk. Wegen $f(a_3,1) = f(a_3,2) = 0$ beeinflusst dies die Berechnung von M nicht.

Sei q_3 der Preis des Gutes 3 nach der Preisreduktion. Sobald für einen Käufer a_i, $i \in \{1,2,4\}$, z_{i3} den Wert α_i annimmt, betritt die Kante $(a_i,3)$ das Flussnetzwerk und auch das geschichtete Teilnetzwerk.

Sobald q_3 den Wert $\frac{128}{5} = 25{,}6$ annimmt, geschieht dies als erstes für den Käufer a_2.
Die Kanten $(a_2,3)$ und $(a_2,2)$ betreten das geschichtete Teilnetzwerk, das danach wie folgt aussieht:



$\Rightarrow$

Vor der weiteren Preisreduktion des Gutes 3 muss das geschichtete Teilnetzwerk erweitert werden. Danach müssen die Preise der Güter 3 und 2 reduziert werden.

◊

Demzufolge haben wir zu berechnen

a) den Gesamtbetrag M_1 an Preisreduktion, der durch nicht ausverkaufte Güter absorbiert werden kann und

b) den kleinsten Betrag M_2 an Preisreduktion, so dass eine neue Kante das geschichtete Teil=netzwerk betritt.

$\min\{M_1, M_2\}$ ergibt dann den Gesamtbetrag M an Preisreduktion, der in der aktuellen Runde der Preisreduktionsphase gewählt wird.

Berechnung von M_1:

Für $j' \in R(j)$ bezeichne

$$ü(j') := p_{j'} - f(j', t)$$

den Überschuss des Gutes j'.

Für jedes Gut $j' \in R(j)$ muss derjenige Anteil seiner Preisreduktion, der seinen Überschuss übersteigt, im geschichteten Teilnetzwerk rück=

wärts in Richtung Gut j transportiert werden. Dabei werden die Kanten von K_ℓ nach $R_{\ell+1}$, $\ell \geq 0$ gegen die Kantenrichtung durchquert.

$\Rightarrow$

$\leq f(e)$ Fluss kann über solch eine Rückwärtskante transportiert werden.

Von jedem Gut $j' \in R(j) \setminus \{j\}$ muss auch der eingehende Fluss bezüglich Preisreduktionen in Schichten mit größeren Index, der nicht durch seinen Überschuss $Ü(j')$ absorbiert werden kann, in Richtung j wegtransportiert werden.

Wir verwenden die Variable x für die Gesamtpreisreduktion der Güter in $R(j)$. Sei

$$g(x, j')$$

derjenige Fluss, der von $Ü(j')$ absorbiert oder von j' in Richtung j wegtransportiert werden muss, wenn x die Gesamtpreisreduktion ist. D.h.,

$$g(x, j') = g_{red}(x, j') + g_{in}(x, j'),$$

wobei

- $g_{red}(x, j')$ die Preisreduktion von j' und

- $g_{in}(X, j')$ den in j' eingehenden Fluss bezüglich Preisreduktionen von Gütern in Schichten mit größeren Index

bezeichnen. Sei

$$g(X, a_{i'})$$

der eingehende Fluss des Käufers $a_{i'}$, wenn X die Gesamtpreisreduktion ist.

Die Berechnung der größtmöglichen Preisreduktion, die von nicht ausverkauften Gütern absorbiert werden kann, ist schwierig.

$\rightsquigarrow$

Wir definieren Regeln, die

1) den Fluss $g(X, j') - \ddot{u}(j')$ auf die Rückwärtskanten von K_{e-1} nach j', wobei R_e die Schicht von j' ist, und

2) den eingehenden Fluss $g(X, a_{i'})$ auf die Kanten von $a_{i'}$ nach R_{e-1}, wobei K_{e-1} die Schicht des Käufers $a_{i'}$ ist, verteilen.

Anstatt die größtmögliche Gesamtpreisreduktion zu berechnen, berechnen wir die größtmögliche Gesamtpreisreduktion, die unter Einhaltung dieser Regeln erreicht werden kann.

Definition der Regeln:

Idee:

i) Verteile den Fluss $g(X,j') - \ddot{u}(j')$ auf die Kanten von K_{e-1} nach j' proportional zum Fluss auf diesen Kanten.

ii) Verteile den einzelnen Fluss $g(X, a_{i'})$ gleichmäßig auf die ausgehenden Kanten von $a_{i'}$.

Für die formale Definition benötigen wir einige Bezeichnungen. Für $j' \in R_e$ definieren wir:

- $E_{in}(j') := \{ (a_{i'}, j') \mid a_{i'} \in K_e \text{ und } (a_{i'}, j') \in E(j) \}$

und

- $E_{out}(j') := \{ (a_{i'}, j') \mid a_{i'} \in K_{e-1} \text{ und } (a_{i'}, j') \in E(j) \}$

Für $a_{i'} \in K_{e-1}$ definieren wir:

- $E_{in}(a_{i'}) := \{ (a_{i'}, j') \mid j' \in R_e \text{ und } (a_{i'}, j') \in E(j) \}$

und

- $E_{out}(a_{i'}) := \{ (a_{i'}, j'') \mid j'' \in R_{e-1} \text{ und } (a_{i'}, j'') \in E(j) \}$

Weiterhin definieren wir

- $k_{j'} := \sum\limits_{(a_{i'}, j') \in E_{out}(j')} f(a_{i'}, j')$ und

- $z(a_{i'}) := | E_{out}(a_{i'}) |$.

Offensichtlich kann höchstens $k_{j'}$ Fluss von j' in Richtung j weggeschickt werden. D.h.,

$$g(X,j') - \ddot{u}(j') \leq k_{j'}$$

muss erfüllt sein. Sei

$$\hat{g}(X,j') := g(X,j') - \ddot{u}(j').$$

Wir verteilen den Fluss $\hat{g}(X,j')$ auf die Kanten in $E_{out}(j')$ proportional zum Fluss auf diesen Kanten. D.h.,

- die Kante $(a_{i'},j') \in E_{out}(j')$ erhält den Fluss

$$\frac{f(a_{i'},j')}{k_{j'}} \cdot \hat{g}(X,j').$$

Wir verteilen den eingehenden Fluss $g(X,a_{i'})$ gleichmäßig auf die Kanten in $E_{out}(a_{i'})$. D.h.,

- die Kante $(a_{i'},j'') \in E_{out}(a_{i'})$ erhält den Fluss

$$\frac{1}{z(a_{i'})} \cdot g(X,a_{i'}).$$

<u>Bezeichnung:</u>

- Falls $\hat{g}(X,j') = k_{j'}$, dann heißt das Gut j' <u>blockiert</u>.
- $M(j')$ bezeichnet diejenige Gesamtpreisreduktion,

die das Gut j' blockiert. D.h.,

$$\hat{g}(M(j'), j') = b_{j'}.$$

Ziel:

Berechnung von $M(j') \quad \forall\, j' \in R(j) \setminus \{j\}$.

Sei R_r die letzte Schicht von Gütern in $G(\bar{p}, j)$.

Wir starten in Schicht R_r und berechnen für jedes Gut $j' \in R_r$ den Wert $M(j')$. Dann tun wir dasselbe für jedes Gut in R_{r-1} u.s.w.

Da alle Kanten mit positivem Fluss im Flussnetzwerk verbleiben müssen, verteilen wir die Gesamtpreisreduktion proportional auf die Güter in $R(j)$, so dass das Verhältnis unter den Gütern in $R(j)$ gleich bleibt.

Sei

$$K_1 := \sum_{j' \in R(j)} p_{j'}$$

der Gesamtpreis der Güter in $R(j)$. Dann definieren wir für jedes Gut $j' \in R(j)$:

$$g_{red}(X, j') := \frac{p_{j'}}{K_1} \cdot X.$$

Annahme:

1) R_ℓ, $\ell > 0$ ist die aktuelle Schicht,

2) für jedes Gut $j' \in R_e$ ist ein Ausdruck für seinen eingehenden Fluss $g_{in}(X, j')$ berechnet und
3) unser Ziel ist die Berechnung von $M(j')\ \forall j' \in R_e$

Bemerkung:
Es gilt $g_{in}(X, j') = 0 \quad \forall j' \in R_r$.

Wir erhalten $g(X, j')$ und dann $\hat{g}(X, j')$ wie folgt:

$$g(X, j') := \frac{p_{j'}}{k_1} \cdot X + g_{in}(X, j')$$

$$\hat{g}(X, j') := g(X, j') - ü(j').$$

Betrachte nun die Gleichung

$$(*) \quad \frac{p_{j'}}{k_1} M(j') + g_{in}(M(j'), j') - ü(j') = k_{j'}.$$

Mittels Lösen der Gleichung (*) für $M(j')$ erhalten wir eine Instruktion für die Berechnung von $M(j')$. Wir verwenden diese und berechnen $M(j')$.

Nachdem wir $\hat{g}(X, j')\ \forall j' \in R_e$ berechnet haben, erhalten wir $\forall a_{i'} \in K_{e-1}$ wie folgt einen Ausdruck für $g(X, a_{i'})$:

$$g(X, a_{i'}) := \sum_{(a_{i'}, j') \in E_{in}(a_{i'})} \frac{f(a_{i'}, j')}{k_{j'}} \cdot \hat{g}(X, j').$$

Gegeben $g(X, a_{i'})\ \forall a_{i'} \in K_{e-1}$ erhalten wir wie folgt einen Ausdruck für $g_{in}(X, j')$, $j' \in R_{e-1}$:

$$g_{in}(X, j') := \sum_{(a_{i'}, j') \in E_{in}(j')} \frac{1}{z(a_{i'})} g(X, a_{i'}).$$

Nachdem $M(j')$ für alle $j' \in R(j) \setminus \{j\}$ berechnet ist, kann M_1 berechnet werden. Höchstens

$$Ü(j) := p_j - f(j, t)$$

Fluss kann durch das Gut j absorbiert werden. Daher definieren wir

$$M(j) := Ü(j).$$

Wir erhalten nun M_1 durch

$$M_1 := \min \{ M(j') \mid j' \in R(j) \}.$$

<u>Ziel:</u> Berechnung von M_2.

Hierzu analysieren wir die Situationen, in denen eine neue Kante dem geschichteten Teilnetzwerk hinzuzufügen sind, genauer.

Die Preisreduktion eines Gutes $j' \in R(j)$ kann für einen Agenten $a_{i'} \notin K(j)$

$$\frac{u_{i'j'}}{q_{j'}} = \alpha_{i'},$$

wobei $q_{j'}$ der Preis des Gutes j' nach der Preisreduktion ist, nach sich ziehen.

$\Rightarrow$

Die Kante $(a_{i'}, j')$ ist dem Teilnetzwerk

$g(\bar{q}, j)$, wobei $\bar{q}$ der Preisvektor nach der Reduktion ist, hinzuzufügen.

$\rightsquigarrow$

$\forall\, a_{i'} \in B$, $j' \in A$ sei $M(a_{i'}, j')$ die Gesamtpreisreduktion, so dass die neue Kante $(a_{i'}, j')$ dem Teilnetzwerk hinzuzufügen ist.

<u>Beobachtung:</u>

- Falls $j' \notin R(j)$ oder $a_{i'} \in K(j)$ dann kann eine Preisreduktion nicht die neue Kante $(a_{i'}, j')$ nach sich ziehen.

$\Longrightarrow$

Nur im Fall $j' \in R(j)$ und $a_{i'} \notin K(j)$ ist die neue Kante $(a_{i'}, j')$ möglich.

Diesen Fall schauen wir uns genauer an.

Die neue Kante $(a_{i'}, j')$ ist genau dann dem Teilnetzwerk hinzuzufügen, wenn diese dafür sorgt, dass der relative Nutzen des Gutes j' für den Käufer $a_{i'}$ den Wert $\alpha_{i'}$ erhält. D.h.,

$$\frac{u_{i'j'}}{q_{j'}} = \alpha_{i'}.$$

Wegen

$$q_{j'} = p_{j'} - \frac{p_{j'}}{K_1} M(a_{i'}, j')$$

erhalten wir

$$\frac{u_{i'j'}}{p_{j'} - \frac{p_{j'}}{K_1} M(a_{i'}, j')} = \alpha_{i'}.$$

Lösen dieser Gleichung für $M(a_{i'}, j')$ führt zu

$$M(a_{i'}, j') = \left(1 - \frac{u_{i'j'}}{\alpha_{i'} p_{j'}}\right) K_1.$$

Unter Verwendung dieser Gleichung berechnen wir $M(a_{i'}, j')$. Sei

$$M_2 := \min \left\{ M(a_{i'}, j') \mid j' \in R(j),\ a_{i'} \notin K(j) \right\}.$$

Wir erhalten nun M durch

$$M := \min \{ M_1, M_2 \}.$$

In Abhängigkeit von M berechnen wir nun den neuen Preisvektor

$$\bar{q} := (q_1, q_2, \dots, q_m)$$

und modifizieren wie oben beschrieben den Fluss f zu einem Fluss f'.

Eine neue Kante e heißt <u>kritisch</u>, falls diese auf einem Pfad P, der einen Käufer mit Rest=kapital mit einem nicht ausverkauften Gut ver=bindet, liegt.

<u>Lemma 4.1</u>
Falls in $G(\bar{q})$ keine kritische neue Kante existiert, dann ist der oben definierte Fluss f' ein maximaler

ler Fluss in $\mathcal{G}(\bar{q})$.

<u>Beweis</u>:

<u>Annahme</u>: $\mathcal{G}(\bar{q})$ enthält keine kritische neue Kante.

Es gilt:
$$|f'| = |f|.$$

<u>Annahme</u>:
f' ist kein maximaler Fluss in $\mathcal{G}(\bar{q})$.

Dann existiert in $\mathcal{G}(\bar{q})$ ein bezüglich f' augmentierender Pfad P mittels dem der Fluss f' zu einem Fluss f'' mit $f'' > f'$ augmentiert werden kann.

Falls keine neue Kante e auf P liegt, dann gibt es den augmentierenden Pfad P bereits in $\mathcal{G}(\bar{p})$. Dies widerspricht der Maximalität von f in $\mathcal{G}(\bar{p})$.

Andernfalls, da P ein augmentierender Pfad ist, verbindet P einen Käufer mit Restkapital mit einem nicht ausverkauften Gut. Dann ist aber die neue Kante e eine in $\mathcal{G}(\bar{q})$ kritische Kante.

Widerspruch!

Falls eine kritische Kante dem Flussnetzwerk hinzugefügt worden ist, dann starten wir mit den Fluss f' und berechnen einen in $\mathcal{G}(\bar{q})$ maximalen Fluss f''. Mindestens eines der folgenden Ereignisse tritt ein:

1) Ein zusätzliches Gut (j oder ein anderes) ist ausverkauft oder ein Käufer verliert sein Restkapital.
2) Einige Kanten haben das geschichtete Teilnetwerk verlassen.

Insgesamt erhalten wir folgenden Algorithmus für die Preisreduktionsphase:

<u>Algorithmus</u> PREISREDUKT

<u>Eingabe</u>: $\bar{p}$, Flussnetwerk $\mathcal{G}(\bar{p})$ und ein maximaler Fluss f in $\mathcal{G}(\bar{p})$.

<u>Ausgabe</u>: $\bar{q}$, Flussnetwerk $\mathcal{G}(\bar{q})$, wobei alle Güter ausverkauft sind und ein maximaler Fluss f in $\mathcal{G}(\bar{q})$.

<u>Methode</u>:

<u>while</u> $\exists$ nicht ausverkauftes Gut
    <u>do</u>
        wähle solches Gut j;
        <u>while</u> Gut j ist nicht ausverkauft
            <u>do</u>
                Berechne, wie oben beschrieben, M_1;
                Berechne, wie oben beschrieben, M_2;

$M := \min\{M_1, M_2\}$;
Berechne, wie oben beschrieben, bzgl. M den neuen Preisvektor $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ und das Flussnetzwerk $\mathcal{G}(\bar{q})$;
Ändere, wie oben beschrieben, den Fluss f in $\mathcal{G}(\bar{p})$ zum Fluss f' in $\mathcal{G}(\bar{q})$;
<u>if</u> keine kritische Kante wurde dem Netzwerk hinzugefügt
<u>then</u>
$f := f'$
<u>else</u>
Starte mit f' und berechne in $\mathcal{G}(\bar{q})$ einen maximalen Fluss f
<u>fi</u>;
$\bar{p} := \bar{q}$
<u>od</u>
<u>od</u>.

4.2 Die Preiserhöhungsphase

Die Ausgabe der Preisreduktionsphase ist die Eingabe der Preiserhöhungsphase. Die Preiserhöhungsphase verläuft analog zur Preisreduktionsphase.

Wir wählen einen Käufer $a_i \in B$,

der noch Restkapital besitzt und erhöhen die Preise derjenigen Gütern, die im Flussnetzwerk mit a_i verbunden sind. Aufgrund der Preiserhöhung dieser Güter sind auch die Preise anderer Güter zu erhöhen.

Annahme:

- Der Preis des Gutes j' wird erhöht.
- j' ist mit einem Käufer $a_{i'}$ verbunden und der Fluss auf der Kante $(a_{i'}, j')$ ist positiv.

$\Longrightarrow$

Die Preise aller Güter, die mit dem Käufer $a_{i'}$ verbunden sind, müssen erhöht werden, da andernfalls die Kante $(a_{i'}, j')$ das Netzwerk verlassen würde.

Sei $L(a_i)$ die Menge aller Güter, deren Preise aufgrund der Preiserhöhung der zu a_i benachbarten Güter erhöht werden müssen.

- Die Preiserhöhung der mit a_i verbundenen Güter erzwingt genau dann eine akkurate Preiserhöhung des Gutes j', wenn es einen Pfad

$$P = (a_i = a_{i_1}, j_1, a_{i_2}, j_2, a_{i_3}, \ldots, a_{i_r}, j_r = j')$$

mit

i) $(a_{i_1}, j_1) \in E'$, $(a_{i_k}, j_{k-1}), (a_{i_k}, j_k) \in E'$ und

ii) $f(a_{i_k}, j_{k-1}) > 0$, $1 < k \leq r$

existiert.

Wir nennen solchen Pfad j'-<u>erzwingend</u>.

<u>Struktur von P</u>:

$$a_i = a_{i_1} \longrightarrow j_1 \xleftarrow{>0} a_{i_2} \longrightarrow j_2 \xleftarrow{>0} \cdots \longrightarrow a_{i_r} \longrightarrow j_r = j'$$

Auf P liegen die Kanten von einem Gut zu einem Käufer in Rückwärtsrichtung. Solche Kante heißt <u>Rückwärtskante bzgl. P</u>. Seien

$S(a_i) := \{ a_j \in B \mid$ Preiserhöhung der zu a_i benachbarten Güter erzwingt die Preiserhöhung von zu a_j benachbarten Güter $\}$

<u>Ziel</u>: Berechnung von $S(a_i)$ und $L(a_i)$.

Auch hier genügt es kürzeste erzwingende Pfade zu betrachten. Daher berechnen wir auch hier gleichzeitig ein geschichtetes Teilnetzwerk $\mathcal{G}(\bar{q}, a_i) := (S(a_i) \cup L(a_i), E(a_i))$ von $\mathcal{G}(\bar{q})$. Dieses enthält genau die kürzesten erzwingenden Pfade der Güter in $L(a_i)$.

Die Schichten in $\mathcal{G}(\bar{q}, a_i)$ enthalten abwechselnd Knoten in $S(a_i)$ und Knoten in $L(a_i)$. Bezeichne

- S_ℓ, $\ell \geq 1$ die ℓ-te Schicht mit Knoten in $S(a_i)$ und

L_ℓ, $\ell \geq 1$ die ℓ-te Schicht mit Knoten in $L(a_i)$.

Seien

$$S_1 := \{a_i\},$$
$$L_1 := \{j' \in A \mid (a_i, j') \in E'\} \text{ und}$$
$$\bar{E}_{f,1} := \{(a_i, j') \mid (a_i, j') \in E'\}.$$

Für $\ell \geq 1$ definieren wir

$$S_{\ell+1} := \{a_{i'} \in B \setminus \bigcup_{h=1}^{\ell} S_h \mid \exists j' \in L_\ell : (a_{i'}, j') \in E' \text{ und } f(a_{i'}, j') > 0\},$$

$$\bar{E}_{b,\ell+1} := \{(a_{i'}, j') \in E' \mid a_{i'} \in S_{\ell+1}, j' \in L_\ell \text{ und } f(a_{i'}, j') > 0\},$$

$$L_{\ell+1} := \{j' \in A \setminus \bigcup_{h=1}^{\ell} L_h \mid \exists a_{i'} \in S_{\ell+1} : (a_{i'}, j') \in E'\}$$

und

$$\bar{E}_{f,\ell+1} := \{(a_{i'}, j') \in E' \mid a_{i'} \in S_{\ell+1} \text{ und } j' \in L_{\ell+1}\}.$$

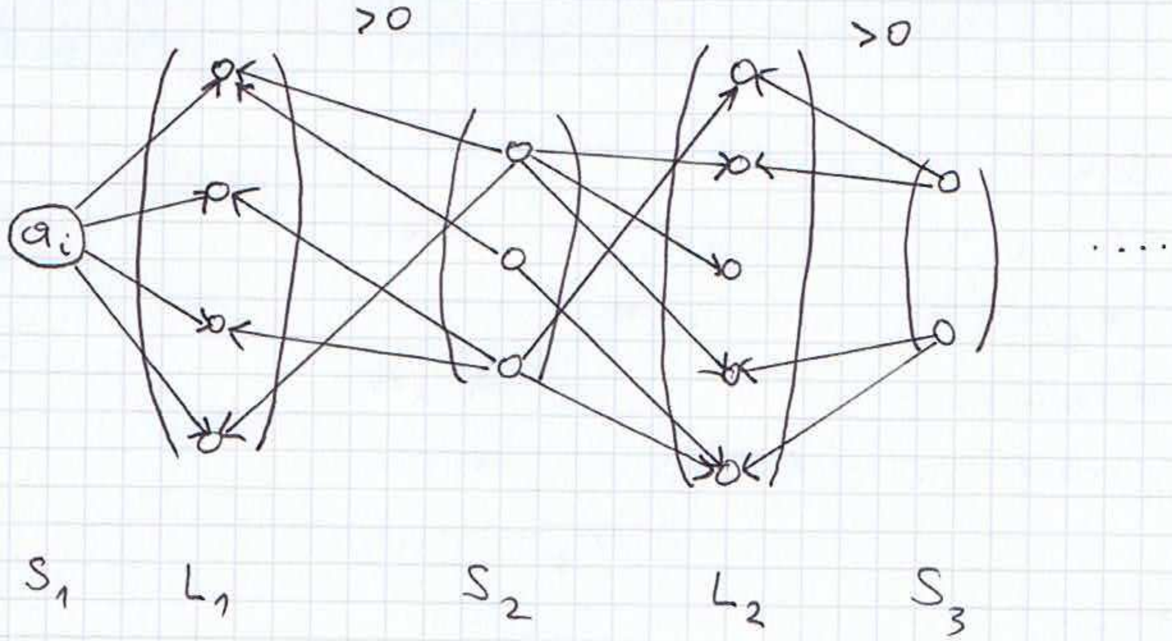
Konstruktion $\Rightarrow$

$$S(a_i) = \bigcup_\ell S_\ell \,, \quad L(a_i) = \bigcup_\ell L_\ell$$

und

$$E(a_i) = \bigcup_\ell (\bar{E}_{f,\ell} \cup \bar{E}_{b,\ell}).$$

Folgendes Bild beschreibt die Struktur von $G_g(\bar{q}, a_i)$:



Wir erhöhen die Preise aller Güter in $L(a_i)$ bis das geschichtete Teilnetzwerk seine Struktur ändert oder a_i kein Restkapital mehr besitzt. Analog zu M_1 und M_2 berechnen wir für das Teilnetzwerk $\mathcal{G}(\bar{q}, a_i)$ die Werte N_1 und N_2. Die Gesamtpreiserhöhung der aktuellen Runde ist dann $N := \min\{N_1, N_2\}$. Sobald kein Käufer mehr Restkapital besitzt endet die Preiserhöhungsphase. Der berechnete Preisvektor ist dann ein Marktgleichgewicht.

Insgesamt erhalten wir folgenden Algorithmus für die Preiserhöhungsphase.

<u>Algorithmus</u> PREISERHÖHP

<u>Eingabe:</u> Ausgabe des Algorithmus PREISREDUKP

<u>Ausgabe:</u> $\bar{p}$, Flussnetzwerk $\mathcal{G}(\bar{p})$, wobei kein Käufer Restkapital besitzt und ein maximaler Fluss f in $\mathcal{G}(\bar{p})$.

Methode:

while $\exists$ Käufer mit Restkapital
  do
    wähle solchen Käufer a_i
    while Käufer a_i hat Restkapital
      do
        Berechne N_1 analog zu M_1;
        Berechne N_2 analog zu M_2;
        $N := \min\{N_1, N_2\}$
        Berechne bzgl. N den neuen Preis=vektor $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ und das Flussnetzwerk $\mathcal{G}(\bar{p})$;
        Ändere den Fluss f in $\mathcal{G}(\bar{q})$ zum Fluss f' in $\mathcal{G}(\bar{p})$;
        if keine kritische Kante wurde dem Netzwerk hinzugefügt
          then
            $f := f'$
          else
            Starte mit f' und berechne in $\mathcal{G}(\bar{p})$ einen maximalen Fluss f
        fi;
        $\bar{q} := \bar{p}$
      od
  od.

Insgesamt erhalten wir folgenden Algorithmus zur Berechnung eines Marktgleichgewichtes. Da=

bei verwenden wir den Startpreisvektor $\bar{p} := \left(\frac{K}{m}, \frac{K}{m}, \ldots, \frac{K}{m}\right)$. Jeder Startpreisvektor $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ mit $p_j > 0$, $1 \leq j \leq m$ und $\sum_{j=1} p_j = K$ kann verwendet werden.

Algorithmus FISHERM

Eingabe: Menge $A := \{1, 2, \ldots, m\}$ von teilbaren Gütern, Menge $B := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ von Käufern und für jeden Käufer $a_i \in B$ ein Startkapital e_i und eine lineare Nutzenfunktion $u_i : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+$

Ausgabe: Marktgleichgewicht $\bar{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$

Methode:

$K := \sum_{i=1}^{m} e_i$;

for $j := 1$ **to** m
  do
    $p_j := \frac{K}{m}$
  od;
Berechne das Flussnetzwerk $\mathcal{G}(\bar{p})$;
Berechne maximalen Fluss in $\mathcal{G}(\bar{p})$;
PREISREDUKP;
PREISERHÖHP;
gib aktuellen Preisvektor $\bar{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$ aus.