Da der Algorithmus FISHERM nur mit einem maximalen Fluss der Größe $K = \sum_{i=1}^{n} e_i$ terminiert, terminiert dieser immer mit einem Marktgleichgewicht. Also müssen wir für den Korrektheitsbeweis nur zeigen, dass der Algorithmus terminiert.

$\rightsquigarrow$

<u>Ziel</u>:

Analyse der Laufzeit des Algorithmus FISHERM.

- Die Initialisierung von K und dem Startpreisvektor erfolgt in $O(n+m)$ Zeit. Danach kann das Flussnetzwerk $\mathcal{G}(\bar{p})$ in $O(m \cdot n)$ Zeit berechnet werden. Gegeben $\mathcal{G}(\bar{p})$ erhalten wir einen maximalen Fluss f in $\mathcal{G}(\bar{p})$ in $O((m+n)^3)$ Zeit.

<u>Analyse der Preisreduktionsphase</u>:

- Die Ermittlung eines Gutes j mit $p_j > f(j,t)$ kann in $O(1)$ Zeit erfolgen, wenn bei der Berechnung des Flusses f diese Güter gesondert abgelegt wurden.

- Die Berechnung von M_1 erfolgt in $O(|\mathcal{G}(\bar{p},j)|)$ Zeit. Für die Berechnung von M_2 genügt $O(m \cdot n)$ Zeit.

$\Rightarrow$

M kann in $O(m \cdot n)$ Zeit berechnet werden.

- Gegeben M und den aktuellen Preisvektor $\bar{p}$ erhalten wir den neuen Preisvektor $\bar{q}$ in $O(m)$ Zeit.

- Gegeben den maximalen Fluss f in $\mathcal{G}(\bar{p})$ kann der Fluss f' in $O(|\mathcal{G}(\bar{p},j)|) = O(m \cdot n)$ Zeit berechnet werden.

- Falls neue Kanten in das Flussnetzwerk eingefügt werden, dann können die kritische Kanten in $O(m \cdot n)$ Zeit ermittelt werden.

<u>Übung:</u>
Entwickeln Sie einen Algorithmus, der die kritischen Kanten in $O(m \cdot n)$ Zeit ermittelt.

- Eine Runde der Preisreduktionsphase, in der keine kritische Kante eingefügt wird, kann somit in $O(m \cdot n)$ Zeit durchgeführt werden.
  Falls kritische Kanten eingefügt werden, dann kann ein maximaler Fluss in $\mathcal{G}(\bar{q})$ in $O((m+n)^3)$ Zeit berechnet werden, so dass dann eine Runde in $O((m+n)^3)$ Zeit durchgeführt wird.

- Seien R_1 die Anzahl der Runden, in denen eine kritische Kante eingefügt wird und R_2 die Anzahl der Runden, in denen keine kritische Kanten eingefügt werden. Dann ist die Gesamtlaufzeit der Preisreduktionsphase

$$O\left(R_1 \cdot (m+n)^3 + R_2 \cdot m \cdot n\right).$$

$\rightsquigarrow$

<u>Ziel</u>: Herleitung von oberen Schranken für R_1 und R_2.

Jede Runde endet mit mindestens einem der folgenden Ereignissen:

1. Ein Gut j' wird blockiert.
2. Eine Kante wird zu $\mathcal{G}(\bar{p},j)$ hinzugefügt.
3. Das Gut j ist ausverkauft.

Das dritte Ereignis tritt maximal m-mal ein.

<u>Ziel</u>: Herleitung einer oberen Schranke für die Ereignisse vom Typ 1 und vom Typ 2.

~~24.01.~~

Bezeichne $\hat{\mathcal{G}}(\bar{p},j)$ dasjenige Flussnetzwerk, das wir erhalten, indem wir in $\mathcal{G}(\bar{p},j)$ die Kantenrichtung aller Rückwärtskanten ändern. Ein Knoten u ist <u>Nachfolger</u> des Knotens v in $\mathcal{G}(\bar{p},j)$, falls u Nachfolger von v in $\hat{\mathcal{G}}(\bar{p},j)$ ist.

<u>Ziel</u>: Exakte Charakterisierung der Situation, in der die Änderung des Flusses von f nach f' die Blockierung eines Gutes $j' \in R(j)$ nach sich zieht.

Bezeichne $\bar{q}$ den Preisvektor nach der Preisreduktion,

f' der resultierende Fluss und $\mathcal{G}(\bar{q}, j)$ das resultierende geschichtete Teilnetzwerk.

Beobachtung:

Für $(a_{i'}, j') \in \mathcal{G}(\bar{p}, j)$ gilt:

$$f'(a_{i'}, j') = 0 \iff j' \text{ wird blockiert.}$$

Sei j' ein Gut in R_e, das blockiert wird. D.h.,

$$f'(a_{i'}, j') = 0 \quad \forall\, (a_{i'}, j') \in \mathcal{E}(j) \text{ mit } a_{i'} \in K_{e-1}.$$

$\Rightarrow$

Alle kürzesten j'-erzwingenden Pfade verlassen das geschichtete Teilnetzwerk.

$\Rightarrow$

Falls noch ein j'-erzwingender Pfad in $\mathcal{G}(\bar{q}, j)$ existiert, dann ist die Länge eines kürzesten j'-erzwingenden Pfades strikt gewachsen.

Beobachtung:

Falls kein j'-erzwingender Pfad in $\mathcal{G}(\bar{q}, j)$ existiert, dann existiert für alle Nachfolger v von j' in $\mathcal{G}(\bar{p}, j)$ im sich ergebenden Teilnetzwerk $\mathcal{G}(\bar{q}, j)$ kein v-erzwingender Pfad.

Bew. d. Beob.:

Annahme:
$\exists$ Gut v, das Nachfolger von j' in $\mathcal{G}(\bar{p},j)$ ist, mit der Eigenschaft, dass es einen v-erzwingenden Pfad P in $\mathcal{G}(\bar{q},j)$ gibt.

Weiterhin sei v so gewählt, dass kein anderes Gut auf dem Pfad

$$Q := j', \dots, v \quad \text{in } \mathcal{G}(\bar{p},j)$$

diese Eigenschaft besitzt.

Sei $\bar{Q}$ der Rückwärtspfad von Q. Dann ist

$$R := P, \bar{Q}$$

ein j'-erzwingender Pfad in $\mathcal{G}(\bar{q},j)$.

Beachte, dass eine Kante e auf $\bar{Q}$ mit $f'(e) = 0$ eine Kante von einem Gut zu einem Käufer sein muss.

Definition $\Rightarrow$

Der Fluss einer solchen Kante auf einem j'-erzwingenden Pfad darf null sein.

$\square$

Betrachten wir nun die Situation, dass nach einer Runde für einige blockierte Güter j' kein j'-erzwingender Pfad existiert.

$\Rightarrow$

Einige Knoten und Kanten verlassen das geschichtete Teilnetzwerk.

<u>Ziel:</u>

Aufteilung der Knoten und Kanten, die das geschichtete Teilnetzwerk verlassen, in nicht notwendigerweise disjunkte Komponenten $Z(j')$, j' blockiert, so dass

1) $Z(j')$ ist selbst ein geschichtetes Teilnetzwerk,
2) alle Kanten e mit $f'(e) > 0$, die das geschichtete Teilnetzwerk verlassen, sind in mindestens einer dieser Komponenten enthalten und
3) jede Kante innerhalb einer Komponenten hat positiven Fluss.

Wir definieren $Z(j')$ analog zum geschichteten Teilnetzwerk $\mathcal{G}(\bar{q}, j)$. Wir starten im Knoten j' und erhalten mit Hilfe von $\mathcal{G}(\bar{p}, j)$ und dem Fluss f' die Komponente $Z(j')$ auf folgende Art und Weise:

- Sei R_ℓ in $\mathcal{G}(\bar{p}, j)$ diejenige Schicht, die den blockierten Knoten j' enthält.
  - Wir starten mit j' als erste Schicht von $Z(j')$
  - Die zweite Schicht von $Z(j')$ enthält genau diejenige Käufer in K_e, die direkte Nachfolger von j' sind.

- Genau diejenige Güter j'' in R_{e+1}, die mit einem Käufer $a_{i''}$ aus der zweiten Schicht verbunden sind, wobei $f'(a_{i''}, j'') > 0$, bilden die dritte Schicht von $Z(j')$.
- Die vierte Schicht von $Z(j')$ enthält genau diejenige Käufer in K_{e+1}, die mit einem Gut in der dritten Schicht von $Z(j')$ verbunden sind.

⋮ u.s.w.

Die Kanten, die bei der Definition der Schichten verwandt wurden, sind gerade die Kanten zwischen den Schichten in $Z(j')$.

<u>Bemerkung</u>:

- Jedes Gut $j'' \in R(j)$ mit $f'(a_{i''}, j'') = 0$ für eine Kante $(a_{i''}, j'')$ wobei $a_{i''}$ Käufer in $Z(j')$ ist blockiert. Obige Beobachtung impliziert, dass kein j''-erzwingender Pfad existiert. Somit definiert j'' seine eigene Komponente $Z(j'')$.
- Möglicherweise ist ein Gut oder Käufer von verschiedenen blockierten Knoten, die das Teilnetzwerk verlassen, erreichbar.

$\Longrightarrow$

Die Komponenten sind nicht notwendigerweise paarweise disjunkt.

<u>Ziel:</u> Exakte Charakterisierung der Situation, in der eine Kante $(a_{i'}, j')$ das geschichtete Teilnetzwerk bzw. das Flussnetzwerk verlässt.

Seien $\mathcal{G}(\bar{p})$ das aktuelle Flussnetzwerk und $\mathcal{G}(\bar{p}, j)$ das aktuelle geschichtete Teilnetzwerk. Sei $(a_{i'}, j')$ eine Vorwärtskante in $\mathcal{G}(\bar{p}, j)$. Dann ist der Fluss auf $(a_{i'}, j')$ positiv, d.h., $f(a_{i'}, j') > 0$. Der Fluss auf $(a_{i'}, j')$ wird genau dann null, wenn das Gut j' blockiert.

<u>Annahme:</u> j' blockiert, d.h., $f'(a_{i'}, j') = 0$.

Dann verlässt die Kante $(a_{i'}, j')$ das geschichtete Teilnetzwerk, bleibt aber eine Kante im Flussnetzwerk. Zwei Fälle können eintreten:

i) Es existiert weiterhin ein j'-erzwingender Pfad

$\Rightarrow$

j' bleibt im geschichteten Teilnetzwerk.

$\Rightarrow$

Im nächsten Preisreduktionsschritt wird der Preis des Gutes j' reduziert.

$\Rightarrow$

Die Kante $(a_{i'}, j')$ verbleibt auch nach dem nächsten Preisreduktionsschritt im Flussnetzwerk.

ii) Es existiert kein j'-erzwingender Pfad

$\Rightarrow$

Die Komponente $Z(j')$ verlässt das geschichtete Teilnetzwerk.

$\Rightarrow$

Im nächsten Preisreduktionsschritt wird der Preis des Gutes j' nicht reduziert.

$\Rightarrow$

Falls $a_{i'}$ noch im geschichteten Teilnetzwerk enthalten ist, dann wird der Preis von mindestens einem mit $a_{i'}$ verbundenen Gut reduziert, so dass die Kante $(a_{i'}, j')$ das Flussnetzwerk nach dem nächsten Preisreduktionsschritt verlässt.

<u>Ziel</u>: Exakte Charakterisierung der Situation, in der eine Kante das geschichtete Teilnetzwerk betritt.

Zunächst benötigen wir einige Bezeichnungen.

- Wir sagen, eine Kante $(a_{i'}, j')$ <u>betritt das geschichtete Teilnetzwerk</u> $\mathcal{G}(\bar{p}, j)$ <u>direkt</u>, falls $(a_{i'}, j') \notin E'$, $j' \in R(j)$ und aufgrund der Preisreduktion des Gutes j' die Kante $(a_{i'}, j')$ das geschichtete Teilnetzwerk betritt.
- Sei $Z(j_1)$ diejenige Komponente, die den Käufer $a_{i'}$ enthält. Aufgrund des direkten Betretens der Kante $(a_{i'}, j')$ wird die gesamte Komponente $Z(j_1)$ dem geschichteten Teil=

netzwerk hinzugefügt. Dies sieht man ein, indem man mit dem Käufer $a_{i'}$ startet und die Konstruktion des geschichteten Teilnetzwerk durchführt. (Beachte, dass jede Kante in $Z(j_1)$ positiven Fluss hat.)

- Sei $Z(j_2)$ eine Komponente, so dass ein Käufer $a_{i''} \in Z(j_2)$, für den gilt:

  $$(a_{i''}, j_1) \in E' \setminus E(j)$$

  Dann betritt $a_{i''}$ und somit auch die gesamte Komponente $Z(j_2)$ das geschichtete Teilnetzwerk.

$\vdots$ u.s.w.

- Bezeichne $H(a_{i'})$ dasjenige geschichtete Teilnetzwerk, das aufgrund des direkten Betretens einer Kante $(a_{i'}, j')$ dem geschichteten Teilnetzwerk $\mathcal{G}(\bar{p}, j)$ hinzugefügt wird.
- Ein Gut j'' <u>betritt das geschichtete Teilnetzwerk</u> $\mathcal{G}(\bar{p}, j)$ <u>indirekt</u>, falls eine Kante $(a_{i'}, j')$ das geschichtete Teilnetzwerk direkt betritt und das Hinzufügen des Käufers $a_{i'}$ das Hinzufügen des Gutes j'' nach sich zieht. D.h., $j'' \in H(a_{i'})$.

Annahme:

Das Gut $j' \notin R(j)$ betritt das geschichtete Teilnetzwerk während des aktuellen Reduktionsschrittes.

$\Longrightarrow$

$\exists$ Gut $j_1 \in R(j)$, Käufer $a_{i_1} \notin K(j)$, so dass die Reduktion des Preises des Gutes j_1 das direkte Betreten der Kante (a_{i_1}, j_1) zur Folge hat, wobei $j' \in H(a_{i_1})$.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) Die Kante (a_{i_1}, j_1) ist <u>alt</u>, d.h., (a_{i_1}, j_1) war bereits eine Kante im geschichteten Teilnetzwerk $\mathcal{G}(\sim, j)$.

2) Die Kante (a_{i_1}, j_1) ist <u>neu</u>, d.h., (a_{i_1}, j_1) war bisher nicht eine Kante im geschichteten Teilnetzwerk $\mathcal{G}(\sim, j)$.

Falls die Kante (a_{i_1}, j_1) neu ist, dann beenden wir die Betrachtung.

Andernfalls hat das Gut j_1 das geschichtete Teilnetzwerk $\mathcal{G}(\sim, j)$ vorher wieder betreten. Wir betrachten diejenige Situation, in der das Gut j_1 das Teilnetzwerk $\mathcal{G}(\sim, j)$ betritt.

$\Longrightarrow$

$\exists$ Gut j_2 im geschichteten Teilnetzwerk, so dass die Reduktion des Preises des Gutes j_2 das direkte Betreten einer Kante (a_{i_2}, j_2) zur Folge hat, wobei $j_1 \in H(a_{i_2})$.

Bezüglich der Kante (a_{i_2}, j_2) sind wiederum zwei Fälle möglich. Die Kante (a_{i_2}, j_2) ist alt oder neu.

Falls die Kante (a_{i_2}, j_2) neu ist, dann beenden wir die Betrachtung. Andernfalls, u.s.w.

$\rightsquigarrow$

Insgesamt erhalten wir eine Folge

$$C(j') = j', (a_{i_1}, j_1), (a_{i_2}, j_2), \dots, (a_{i_{s-1}}, j_{s-1}), (a_{i_s}, j_s),$$

wobei $s \geq 1$, so dass

die Kanten $(a_{i_1}, j_1), (a_{i_2}, j_2), \dots, (a_{i_{s-1}}, j_{s-1})$ alt und

die Kante (a_{i_s}, j_s) neu sind.

<u>Bemerkung:</u>
Wir haben nun diejenige Situationen, in denen sich das geschichtete Teilnetzwerk verändert, charakterisiert.

<u>Frage:</u>
Wie führt man nun die Analyse des Algorithmus zu Ende?

5. Weitere Anwendungen

5.1 Maximaler gewichteter Abschluss eines Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. $V_1 \subseteq V$ heißt <u>Abschluss</u> von G, falls

$$\forall i \in V_1 \text{ gilt: } (i,j) \in E \Rightarrow j \in V_1.$$

D.h., aus V_1 führt keine Kante hinaus.

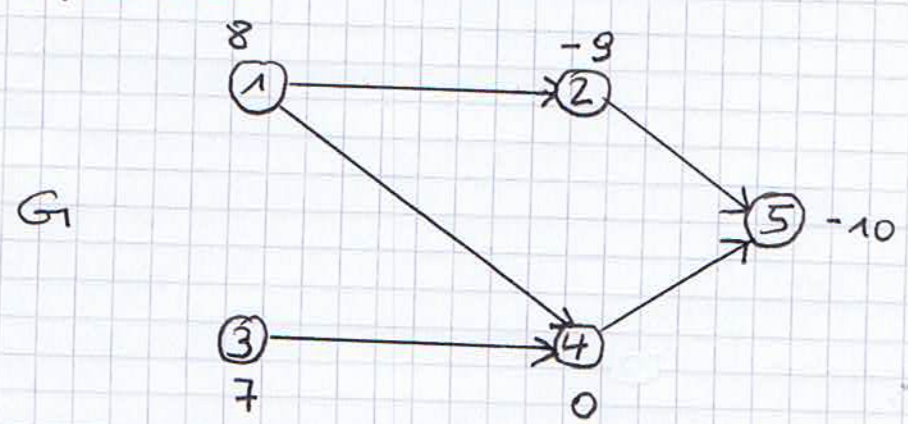
Sei $G = (V, E, w)$ ein gerichteter Graph, wobei $w : V \to \mathbb{Q}$ jedem Knoten in V ein rationales Gewicht zuordnet. Sei V_1 ein Abschluss von G. Dann ist das Gewicht von V_1 definiert durch

$$w(V_1) := \sum_{v \in V_1} w(v).$$

<u>Maximal gewichteter Abschluss-Problem</u>:

<u>gegeben</u>: gewichteter, gerichteter Graph $G = (V, E, w)$
<u>gesucht</u>: Abschluss von G mit maximalem Gewicht.

<u>Beispiel 5.1</u>:



Abschlüsse:

$\{3,4,5\}$, $\{4,5\}$, $\{5\}$, $\{2,5\}$, $\{1,2,4,5\}$
$\{1,2,3,4,5\}$

Der Abschluss $\{3,4,5\}$ hat maximales Gewicht.

$\Diamond$

Ziel:
Transformation des maximal gewichteten Abschlussproblems auf ein maximales Flussproblem.

Gegeben $G = (V, E, w)$ definieren wir ein Flussnetzwerk $G' = (V', E', c, s, t)$ durch

$$V' := V \cup \{s,t\}$$
$$E' := E \cup \{(s,v) \mid v \in V \text{ und } w(v) > 0\} \cup \{(v,t) \mid v \in V \text{ und } w(v) < 0\}$$

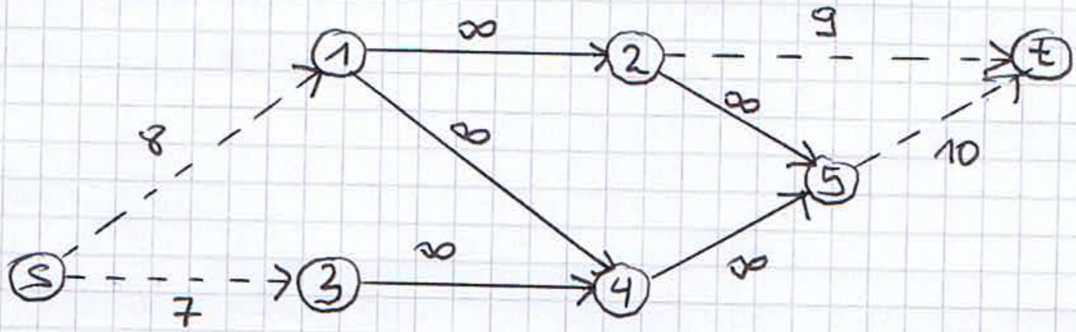
$c : E' \to \mathbb{N}$, wobei

$$c(x,y) := \begin{cases} w(y) & \text{falls } x = s \\ -w(x) & \text{falls } y = t \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Anstatt ∞ können wir jede Zahl größer als $\sum_{v \in V} |w(v)|$ nehmen.

Beispiel 5.1 (Fortführung)

Wir erhalten folgendes Flussnetzwerk:



◊

Ein s,t-separierender Schnitt heißt einfach, falls für alle Vorwärtskanten (x,y) des Schnittes gilt:

$$x = s \quad \text{oder} \quad y = t.$$

Lemma 5.1

Sei $G = (V, E, w)$ ein gewichteter gerichteter Graph und $G' = (V', E', c, s, t)$ das korrespondierende Flussnetzwerk. Sei $V_1 \subseteq V$ und $S := V_1 \cup \{s\}$. Dann gilt:

V_1 Abschluss von $G \Leftrightarrow (S, V' \setminus S)$ ist einfach

Beweis:

„$\Rightarrow$"

Sei V_1 ein Abschluss von G. Dann existiert keine Kante $(x,y) \in E$ mit $x \in V_1$ und $y \in V \setminus V_1$.

$\Rightarrow$

$(S, V' \setminus S)$ enthält keine Vorwärtskante in E

$\Rightarrow$

Alle Vorwärtskanten in $(S, V' \setminus S)$ sind in $E' \setminus E$

$\Rightarrow$

$(S, V' \setminus S)$ ist einfach.

„$\Leftarrow$"

analog Übung

Lemma 5.2

Seien $G = (V, E, w)$ ein gewichteter gerichteter Graph, $G' = (V', E', c, s, t)$ das korrespondierende Fluss=netzwerk, $V_1 \subseteq V$ ein Abschluss von G und $S := V_1 \cup \{s\}$. Dann gilt:

V_1 hat maximales Gewicht $\Leftrightarrow$
$c(S, V' \setminus S)$ ist minimal.

Beweis:

Seien

$$V_2 := V \setminus V_1$$
$$V_i^+ := \{ v \in V_i \mid w(v) \geq 0 \} \qquad i \in \{1,2\}$$
$$V_i^- := \{ v \in V_i \mid w(v) < 0 \}$$

Es gilt:

$$(*) \quad w(V_1) = \sum_{v \in V_1^+} w(v) - \sum_{v \in V_1^-} |w(v)|.$$

Beobachtung:

Der einfache Schnitt $(S, V' \setminus S)$ enthält

- eine Vorwärtskante (v, t) $\forall v \in V_1^-$
- eine Vorwärtskante (s, v) $\forall v \in V_2^+$

$\Longrightarrow$

$$(**) \quad c(S, V' \setminus S) = \sum_{v \in V_2^+} w(v) + \sum_{v \in V_1^-} |w(v)|$$

Die Addition von $(*)$ und $(**)$ ergibt:

$$w(V_1) + c(S, V' \setminus S) = \underbrace{\sum_{v \in V_1^+} w(v) + \sum_{v \in V_2^+} w(v)}_{\text{Konstante unabhängig von der Wahl von } V_1.}$$

$\Rightarrow$

$w(V_1)$ maximal wenn $c(S, V' \setminus S)$ minimal.

Also ist das Gewicht von V_1 maximal genau dann, wenn die Kapazität des Schnittes $(S, V' \setminus S)$ minimal ist.

Da die Kapazität einer Kante in E stets ∞ ist, enthält ein minimaler Schnitt von G' keine Kante in E.

$\Rightarrow$

Ein minimaler Schnitt von G' ist immer einfach.

Insgesamt erhalten wir folgenden Algorithmus zur Berechnung eines Abschlusses maximalen Gewichtes.

Algorithmus MAXGEAB

Eingabe: gewichteter gerichteter Graph $G = (V, E, w)$
Ausgabe: maximal gewichteter Abschluss $V_1 \subseteq V$ von G.

Methode:

(1) Berechne Flussnetzwerk $G' = (V', E', c, s, t)$.
(2) Berechne s,t-separierenden Schnitt $(S, V' \setminus S)$ minimaler Kapazität.
(3) $V_1 := S \setminus \{s\}$.

Anwendungen des Abschlussproblems:

a) Auswahl von Handelniederlassungen

Eine Transportgesellschaft beabsichtigt aus einer Menge S von möglichen Orten eine Auswahl für den Aufbau von Handelniederlassungen zu treffen.