

Wintersemester 2013/2014

BA-INF 011 - Logik und Diskrete Strukturen

Übungsblatt 7

2.12.2013

Aufgabe 1

1. Zeigen Sie: Die Gleichung $ax \equiv b \pmod{n}$ hat eine Lösung in $\mathbb{Z}_n$ genau dann, wenn b durch $\text{ggT}(a, n)$ teilbar ist.
2. Bestimmen Sie die kleinste von 1 verschiedene natürliche Zahl x_0 , die die folgenden Kongruenzen gleichzeitig erfüllt:

$$x_0 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x_0 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$x_0 \equiv 5 \pmod{2}$$

Aufgabe 2

1. Beweisen Sie, dass eine Halbgruppe $(M, \circ)$ höchstens ein neutrales Element besitzen kann.
2. Beweisen Sie die zweite Kürzungsregel: Sei $(G, \circ, e)$ eine Gruppe. Für alle $x, y, z \in G$ gilt $y \circ x = z \circ x \Rightarrow y = z$.
3. Beweisen Sie die Eindeutigkeit der Elemente $x := a^{-1} \circ b$ und $y := b \circ a^{-1}$ als Lösungen der Gleichungen $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$.

Aufgabe 3

Bezeichne S_n die Menge aller bijektiven Abbildungen $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, d.h. die Menge aller Permutationen von $1, 2, \dots, n$. Als Verknüpfung $\circ$ der Permutationen nehmen wir ihre Hintereinanderausführung, d.h. $f \circ g(x) = f(g(x))$. Bezeichne e die identische Permutation, d.h. $e(x) = x$. Zeigen Sie, dass $(S_n, \circ, e)$ eine Gruppe ist. Ist diese Gruppe kommutativ? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4

Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(m\mathbb{Z}, +, 0)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ist.

Aufgabe 5

Zeigen Sie: Seien $(G, \circ, e)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$. Dann ist $(H, \circ)$ genau dann eine Gruppe, wenn gilt:

- $a, b \in H \Rightarrow a \circ b \in H$, für alle $a, b \in G$,
- $e \in H$ und
- $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

Bitte wenden!

Aufgabe 6

Zeigen Sie: Seien $(G, \circ, e)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$. Dann ist $(H, \circ)$ genau dann eine Untergruppe von G , wenn $H \neq \emptyset$ und $\forall a, b \in G : a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.